Financijska matematika

Šegota, Alemka

FINANCIJSKA MATEMATIKA

Alemka Šegota

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U RIJECI

MANUALIA UNIVERSITAS STUDIORUM FLUMINENSIS

ISBN 978-953-7813-12-3

Doc. dr. sc. Alemka Šegota

FINANCIJSKA MATEMATIKA

EKONOMSKI FAKULTET U RIJECI

RIJEKA, 2012.

Doc. dr. sc. Alemka Šegota

FINANCIJSKA MATEMATIKA

Izdavač:

Ekonomski fakultet Sveučilišta u Rijeci

Recenzenti:

Prof. dr. sc. Maja Biljan-August, redoviti profesor
Ekonomskog fakulteta u Rijeci

Prof. dr. sc. Jasna Horvat, redoviti profesor
Ekonomskog fakulteta u Osijeku

Objavljivanje ovog sveučilišnog udžbenika odobrilo je Povjerenstvo za izdavačku djelatnost Sveučilišta u Rijeci Odlukom – Klasa: 602-09/12-01/23, Ur. broj: 2170-57-05-12-3 od 8. studenog 2012.

ISBN 978-953-7813-12-3

PREDGOVOR

Ovaj je udžbenik nastao kao rezultat dugogodišnjeg rada sa studentima Ekonomskog fakulteta u Rijeci i pokriva gradivo kolegija Financijska matematika koji se predaje na trećoj godini preddiplomskog studija. U početku je to bio obvezni kolegij za smjer Financije i bankarstvo, a posljednjih godina nudi se kao izborni kolegij za sve smjerove.

U razgovoru sa studentima doznala sam da izabiru ovaj kolegij zato što misle da će im sadržaj kolegija biti koristan u budućem radu, a većina dolazi na Fakultet nakon završene gimnazije gdje nisu imali prilike slušati gradivo Financijske matematike. Zato sam odlučila napisati e-udžbenik koji će biti dostupan svima i koji će pokrivati gradivo kolegija, i uz to biti što je moguće razumljiviji, uz obilje riješenih primjera.

Izvodi izraza koji se koriste u Financijskoj matematici prikazani su detaljno i bez preskakanja koraka s ciljem da studenti što lakše slijede matematičku logiku i razviju pravilan pristup rješavanju problema koji općenito nisu tako jednostavni.

Nadam se da sam ovim udžbenikom bar malo olakšala rad studentima i svima onima kojima je iz bilo kojega razloga navedeno područje zanimljivo.

Zahvaljujem recenzenticama prof. dr. sc. Maji Biljan-August i prof. dr.sc. Jasni Horvat kao i studentima Ekonomskog fakulteta u Rijeci na njihovim korisnim sugestijama, primjedbama i prijedlozima. Zahvaljujem i prof. Marici Zrilić koja je lektorirala ovaj udžbenik.

U Rijeci, lipnja 2012. Alemka Šegota

SADRŽAJ

UVOD

Financijska matematika obuhvaća područje ekonomske grane matematike koja obrađuje probleme poslovanja, kapitala, rentabilnosti ulaganja, zajmova i dr.[1] Naime, u svakodnevnom životu upravljamo osobnim financijama kako bismo osigurali optimalni raspored financijskih sredstava kojima raspolažemo s ciljem zadovoljavanja naših potreba. Vrijednost novca se tijekom vremena mijenja pa donošenje odgovarajućih odluka postaje još teže. Ukoliko raspolažemo s viškom financijskih sredstava, zanima nas kako ih optimalno „iskoristiti“: uložiti ih u banku ili investirati npr. u nekretninu? Možda imamo mogućnost ulaganja u projekt od kojega očekujemo znatan povrat! U suprotnom, ukoliko smo suočeni s nedostatkom financijskih sredstava, prisiljeni smo zatražiti zajam pod određenim uvjetima. Da bismo mogli donijeti odluku o tome koji zajam je za nas najpogodniji, tj. Najjeftiniji, moramo dobro procijeniti uvjete zajma budući da ćemo vraćati iznos koji smo posudili (glavnicu) uvećan za naknadu korištenja tuđega novca (kamate) u određenom vremenskom razdoblju koje u slučaju većih iznosa zajma i/ili visina kamatnih stopa znatno opterećuju kućni budžet.

Sa sličnim se problemima suočavamo i u poslovnom svijetu. Naime, funkcije financija obuhvaćaju tri vrste odluka koje menadžment poduzeća treba donijeti: odluku o investiranju, odluku o financiranju i odluku o dividendi (J. C. Van Horne, 1992.) Radi se o međusobno povezanim odlukama čija optimalna kombinacija osigurava dioničarima maksimalnu vrijednost poduzeća. Maksimalna vrijednost poduzeća predstavlja racionalno načelo poslovanja koje je nemoguće ostvariti bez razmatranja vremenske vrijednosti novca. Isto vrijedi i za upravljanje kućnim budžetom.

U nastavku ćemo najprije dati kratak prikaz osnovnih matematičkih pojmova i relacija koje se koriste u financijskoj matematici radi boljega razumijevanja izvoda temeljnih izraza.

1. OMJER I RAZMJER

1.1. Omjer

Često u svakodnevnom životu mjerimo jednu veličinu u odnosu na drugu. Govorimo zapravo o omjeru dviju veličina *a* i *b*, odnosno *a/b*, što je jednako kvocijentu koji je jednak broju *a* podijeljenom s brojem *b*. Svojstva koja vrijede za razlomke, kao što je npr. svojstvo koje kaže da se vrijednost razlomka neće promijeniti ako brojnik i nazivnik podijelimo (ili pomnožimo) s istim brojem, vrijede i za omjere. Razlikujemo aritmetički i geometrijski omjer. Aritmetički omjer pokazuje koliko je neka veličina veća od druge dok geometrijski omjer pokazuje koliko je puta neka veličina sadržana u drugoj veličini.

U ovisnosti o tome sadrži li omjer samo dva ili više članova, razlikujemo jednostavne od složenih omjera. Tako npr. ukoliko imamo više jednostavnih omjera moguće je doći do složenog omjera na sljedeći način:

Ako vrijedi

$$a : b = g$$
$$c : d = h$$
$$e : f = i,$$

[1] Hrvatski enciklopedijski rječnik

tada vrijedi $\boxed{a \cdot c \cdot e : b \cdot d \cdot f = g \cdot h \cdot i}$

Ukoliko su nam zadani produženi omjeri općenito zadani $a_1 : a_2 : ... : a_n$, $b_1 : b_2 : ... : b_n, \ldots,\ c_1 : c_2 : ... : c_n$ dobit ćemo složene omjere oblika

$\boxed{a_1 \cdot b_1 \cdot ... \cdot c_1 : a_2 \cdot b_2 \cdot ... \cdot c_2 : ... : a_n \cdot b_n \cdot ... \cdot c_n}$.

Ako je barem jedan član omjera razlomljeni broj, omjer se množi dok se u suprotnom, ukoliko je moguće, omjer dijeli kako bi sadržavao što je moguće manje brojeve kao članove.

Primjer:

2 : 3 : 4 : 5
6 : 8 : 9 : 12
1 : 3 : 5 : 8

$2 \cdot 6 \cdot 1 : 3 \cdot 8 \cdot 3 : 4 \cdot 9 \cdot 5 : 5 \cdot 12 \cdot 8$
12 : 72 :180 : 480

Svaki od dobivenih članova omjera može se podijeliti s 12, što daje jednostavniji omjer koji je lakši za uporabu:

1 : 6 : 15 : 40

1.2. Razmjer

Razmjer izražava jednakost dvaju omjera ili razlomaka. Tako npr. kažemo da su neka četiri broja proporcionalna ili jednakog razmjera ako je razlomak a/b jednak razlomku c/d tj. $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$. Ponekad se ta jednakost piše u obliku razmjera kao: $\boxed{a : b = c : d}$. U navedenom razmjeru članovi a i d su *vanjski,* a b i c su *unutarnji članovi razmjera.* U nastavku ćemo navesti korisna pravila koja vrijede za razmjere.

***Pravilo 1*:**

Produkt vanjskih članova razmjera jednak je produktu unutarnjih članova razmjera.

Koristeći pravilo 1, dolazimo do sljedeće jednakosti:

$\boxed{ad = bc}$

Pravilo 2:

Razmjer vrijedi kad se njezin jedan vanjski i jedan unutarnji član pomnože ili podijele s istim brojem.

Koristeći pravilo 2, možemo pisati sljedeće jednakosti:

$\boxed{a\cdot k : b = c\cdot k : d}$ $\boxed{a : b\cdot k = c : d\cdot k}$ $\boxed{a\cdot k : b\cdot k = c : d}$ $\boxed{a : b = c\cdot k : d\cdot k}$

Pravilo 3:

Razmjer ostaje valjan kad se svi njegovi članovi potenciraju istim eksponentom.

Iz pravila 3 slijedi jednakost:

$\boxed{a^n : b^n = c^n : d^n}$

Pravilo 4:

Razmjer vrijedi ako dva unutarnja ili dva vanjska člana zamijene svoja mjesta.

Koristeći pravilo 1 dolazimo do sljedećih valjanih razmjera:

$\boxed{a : c = b : d}$ $\boxed{d : b = c : a}$

Pravilo 5:

Razmjer ostaje valjan ako se zbroj (razlika) članova lijevog omjera odnosi prema zbroju (razlici) članova desnog omjera kao što se odnose po redu članovi lijevog omjera prema članovima desnog omjera.

Koristeći pravilo 5, dolazimo do sljedećih valjanih razmjera:

$\boxed{(a\pm b):(c\pm d) = a : c}$ $\boxed{(a\pm b):(c\pm d) = b : d}$

Pravilo 6:

Zbroj članova lijevog omjera odnosi se prema zbroju članova desnog omjera kao razlika članova lijevog omjera prema razlici članova desnog omjera.

Koristeći pravilo 6, dolazimo do sljedećeg razmjera:

$\boxed{(a+b):(c+d) = (a-b):(c-d)}$

Ako se razmjer sastoji od više od 4 člana, radi se o proširenom razmjeru, kao npr.

$a : b : c = d : e : f$

Pravilo 7:

Zbroj (razlika) članova lijeve strane prema zbroju (razlici) članova desne strane odnosi se kao članovi kako dolaze po redu s lijeve strane prema članovima desne strane.

Gornje pravilo možemo zapisati pomoću razmjera kako slijedi:

$$\begin{aligned}(a+b+c):(d+e+f) &= a:d \\ &= b:e \\ &= c:f\end{aligned}$$

Općenito za razmjer oblika:

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : \ldots : b_n$$

slijedi:

$$\begin{aligned}(a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n):(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) &= a_1 : b_1 \\ &= a_2 : b_2 \\ &\vdots \\ &= a_n : b_n\end{aligned}$$

2. POSTOTNI I PROMILNI RAČUN

Ako od 100 učenika u nekoj školi 55 čine djevojčice, znamo da je u toj školi 45 dječaka. Djevojčica tada ima 55%, dok je dječaka 45%. Na ovom jednostavnom primjeru možemo zaključiti da je postotni izraz zapravo skraćena verzija objašnjenja koliko se od ukupno 100 jedinica odnosi na neku određenu veličinu. Osnovni elementi postotnog računa su: postotak p, osnovna veličina S i postotni dio P. Postotak je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine. Osnovna veličina je broj od kojega se izračunava postotak, dok je postotni iznos broj koji se dobije kada se od osnovne veličine S odredi dio naznačen danim postotkom.

Ako nas zanima koji se dio od ukupno 1000 jedinica odnosi na neku veličinu, poslužit će nam promilni račun. Krenut ćemo od osnovnog postotnog, odnosno promilnog razmjera:

neka je S osnovna veličina, P postotni dio (promilni dio) te p postotak (promil). Tada se osnovna veličina odnosi prema sto jedinica kao što se postotni dio (promilni dio) odnosi prema postotku (promilu), tj. vrijedi sljedeći razmjer:

$\boxed{S:100 = P:p}$ ili u slučaju promilnog računa $\boxed{S:1000 = P:p}$.

Iz prethodnih razmjera slijede jednakosti postotnog (promilnog) računa:

$\boxed{P = \frac{Sp}{100}}$ $\boxed{S = \frac{100P}{p}}$ $\boxed{p = \frac{100P}{S}}$

$\boxed{P = \frac{Sp}{1000}}$ $\boxed{S = \frac{1000P}{p}}$ $\boxed{p = \frac{1000P}{S}}$

U primjenama nam je često poznata osnovna veličina uvećana ili umanjena za postotni (promilni) dio i zanima nas koliko iznosi osnovna veličina ili postotni (promilni) dio. Da bismo mogli riješiti takve primjere, krenut ćemo od osnovnog postotnog (promilnog) računa i uz pomoć pravila koja vrijede za razmjere doći do izraza za razmjer više ili niže sto (tisuću):
ako u osnovnom postotnom razmjeru $S:100 = P:p$, odnosno osnovnom promilnom razmjeru $S:1000 = P:p$ zamijenimo unutarnje članove, dobit ćemo valjani razmjer oblika $S:P = 100:p$ odnosno $S:P = 1000:p$.

Koristeći pravilo 7, možemo ispisati sljedeće jednakosti:

$\boxed{(S \pm P):(100 \pm p) = S:100}$ $\boxed{(S \pm P):(100 \pm p) = P:p}$ odnosno

$\boxed{(S \pm P):(1000 \pm p) = S:1000}$ $\boxed{(S \pm P):(1000 \pm p) = P:p}$

koje osiguravaju izraze za osnovnu veličinu S i postotni dio P u postotnom računu više (niže) sto:

$\boxed{S = \frac{(S \pm P)100}{100 \pm p}}$ $\boxed{P = \frac{(S \pm P)p}{100 \pm p}}$

odnosno osnovnu veličinu S i promilni dio P u promilnom računu više(niže) tisuću:

$\boxed{S = \frac{(S \pm P)1000}{1000 \pm p}}$ $\boxed{P = \frac{(S \pm P)p}{1000 \pm p}}$

u promilnom računu.

Primjer:

Nabavna cijena hlača iznosi 206 kn što je za 15% manje od njihove prodajne cijene. Kolika je prodajna cijena hlača?

Rješenje:

S – P = 206

p = 15

S = ?

$$S = \frac{(S-P)100}{100-p} = \frac{206 \cdot 100}{100-15} = \frac{20600}{85} = 242{,}35$$

Prodajna cijena hlača iznosi 242,35 kn.

Primjer:

Agencija je klijentu izdala račun uvećan za proviziju od 5‰ na iznos od 25.345,00 kn. Koliki je iznos provizije?

Rješenje:

S + P = 25.345,00
p = 5‰

P = ?

$$P = \frac{(S+P)p}{1000+p} = \frac{25345 \cdot 5}{1000+5} = 126{,}09$$

Provizija iznosi 126,09 kn.

U sljedećem ćemo primjeru vidjeti zašto je potreban oprez kod zaključivanja o postotku za koji se uvećani iznos S+P treba smanjiti da bismo dobili osnovni iznos S i kako odrediti taj novi postotak.

Primjer:

Neka je marama prije poskupljenja od 20% koštala 100,00 kn. Kako je prodaja radi poskupljenja marame znatno opala, donijeta je odluka o vraćanju cijene na staro. Za koliko će se posto nova cijena marame sniziti da bi opet koštala 100,00 kn?

Rješenje:

S = 100
p_1 = 20

p_2 = ?

Nakon poskupljenja od 20% cijena marame S se uveća za postotni dio P, tj. jednaka je

$$S + P = 100 + \frac{100 \cdot 20}{100} = 120\,.$$

Nova cijena od 120 kn se nakon nekog vremena umanjuje za nepoznati postotak kako bi iznosila 100 kn. Taj nepoznati postotak označit ćemo p_2 i odrediti ga na sljedeći način:

$(S+P)-\frac{p_2}{100}\cdot(S+P)=S$ iz čega u nekoliko koraka dolazimo do izraza za p_2:

$$(S+P)(1-\frac{p_2}{100})=S \,|: (S+P)$$

$$1-\frac{p_2}{100}=\frac{S}{S+P}$$

$$-\frac{p_2}{100}=\frac{S}{S+P}-1 \,|\cdot(-100)$$

$$\boxed{p_2=100(1-\frac{S}{S+P})}$$

Nakon uvrštenja zadanih vrijednosti u gornji izraz dolazimo do konačnog rješenja:

$$p_2=100(1-\frac{100}{120})=16{,}66667$$

Novi je postotak manji u odnosu na početni jer je iznos na koji se primjenjuje veći u odnosu na početni. Zato je potreban oprez kod zaključivanja o postotku!

3. NIZOVI

3.1. Pojam niza

Niz je uređeni skup oblika $\{a_1, a_2 ..., a_n ...\}$ i određen je ako, sljedeći neko pravilo, svakom prirodnom broju *n* pridružimo broj a_n. Niz se simbolički zapisuje: $a_1, a_2 ... a_n$.

Ako se niz sastoji od konačnog broja članova, radi se o *konačnom* nizu, inače je niz *beskonačan*. To ne znači da se beskonačnom nizu ne može odrediti sljedeći član, nego samo da članova u nizu ima beskonačno mnogo. *Opći član* niza je broj a_n i on je predstavnik određenog niza. Niz u ovisnosti o tome kakve vrijednosti poprimaju njegovi članovi može biti *rastući, padajući ili oscilirajući.*

Primjer rastućeg niza: $a_n = n+2$, $n=1,2...$ 3, 4, 5, 6…

Primjer padajućeg niza: $a_n=\frac{2}{n+2}$, $n=1,2...$ $\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5}...$

Primjer oscilirajućeg niza: $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, $n = 1,2\ldots\ 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}\ldots$

3.2. Aritmetički niz

Neki nizovi imaju specifična obilježja: ako je npr. razlika između svaka dva susjedna člana niza stalna, kažemo da je niz *aritmetički*.

Primjer aritmetičkog niza: 3, 5, 7, 9, 11 …

Razlika između dva susjedna člana je stalna i u gornjem primjeru iznosi 2. Općenito se *razlika d* određuje kako slijedi:

$\boxed{d = a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i}$ $\quad i = 1,2,3\ldots$ iz čega slijedi $2a_i = a_{i-1} + a_{i+1}$

Izraz za *i-ti* član niza:

$\boxed{a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}}$ $\quad i = 1,2,3\ldots$

Opći član niza a_n moguće je izraziti pomoću prvog člana i razlike niza na sljedeći način:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = \overbrace{a_1 + d}^{a_2} + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = \overbrace{a_1 + 2d}^{a_3} + d = a_1 + 3d$$

analogijom zaključujemo da za opći član niza a_n vrijedi sljedeća jednakost

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$, $\forall n \in N$.

Slijedi izraz za *zbroj n članova aritmetičkog niza* S_n:

$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$.

3.3. Geometrijski niz

Ukoliko je omjer svaka dva susjedna člana niza *q* stalan, niz je *geometrijski*.

Primjer geometrijskog niza: 3, 6, 12, 24, 48…

Da bismo odredili izraz za opći član geometrijskog niza krećemo od izraza za omjer q:

$q = \frac{a_2}{a_1}$ iz čega slijedi $a_2 = a_1 q$

$q = \frac{a_3}{a_2}$ iz čega slijedi $a_3 = a_2 q = a_1 q q = a_1 q^2$

$q = \frac{a_4}{a_3}$ iz čega slijedi $a_4 = a_3 q = a_1 q^2 q = a_1 q^3$

$\vdots$

$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ iz čega slijedi $a_n = a_{n-1} q = a_1 q^{n-1}$

Dakle, *opći član geometrijskog niza* a_n može se izraziti uz pomoć prvog člana i omjera kao:

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}.$$

Zbroj n članova geometrijskog niza S_n jednak je:

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}.$$

4. KAMATNI RAČUN

Kamata je riječ grčkog podrijetla: „kamatos“ u prijevodu znači zarada, ali kako naglašava Giunio (2008;17) također i umor, muku, napor. Najčešće se pojam kamata objašnjava kao *naknada za raspolaganje tuđim novcem.* Njihova je uloga veoma važna i one predstavljaju instrument mikro i makro gospodarske politike.

Najjednostavnija podjela kamata je ona koja kamate dijeli na *ugovorne i zatezne*, a najčešće ju nalazimo u građanskim zakonima. Zbog praktične upotrebe navedena podjela nije dovoljna pa se kamate dijele prema različitim kriterijima. Tako se npr. prema tome radi li se o zajmoprimcu ili zajmodavcu dijele na *aktivne i pasivne.*

Nadalje se kamate mogu podijeliti prema *kriteriju stalnih ili promjenjivih kamatnjaka.* Razlikujemo i kamate koje se obračunavaju na *mjenični iznos*, za razliku od kamata koje se obračunavaju na *glavnicu* za vrijeme trajanja otplate zajma. U situacijama *inflacije* obračunava se *realna kamata*: kamata dobivena nominalnim kamatnjakom korigiranim za stopu inflacije. Ako tražimo zajam, banka će nam osim nominalne kamatne stope na iznos odobrenog zajma obračunati neke dodatne troškove pa ćemo zajam dobiti po višoj „cijeni“ nego što to određuje nominalna kamatna stopa: radi se o *efektivnoj kamatnoj stopi.* Kamate za razdoblje od dana kada su doznačena sredstva do trenutka stavljanja zajma u otplatu nazivaju se *interkalarne kamate*, ali o tome će biti više riječi u poglavlju o zajmovima.

4.1 Jednostavni kamatni račun s primjenom

Ukoliko je zadana vrijednost glavnice C, tada ćemo iznos jednostavnih kamata K odrediti tako da koristeći postotni račun odredimo postotni iznos na zadanu glavnicu. Jednostavne kamate se izračunavaju na dva načina: *dekurzivno ili anticipativno* i najčešće se obračunavaju kod financijskih poslova koji traju kraće od godine dana.

Dekurzivni obračun kamata

Dekurzivnim načinom obračunavamo kamate tako da *na kraju razdoblja* ukamaćivanja izračunamo kamate na glavnicu *s početka tog razdoblja*. Primjerice, nakon što je protekla godina dana, obračunamo jednostavne kamate na glavnicu s početka godine. Kamate se nakon toga *ne pribrajaju glavnici,* tj. glavnica ostaje nepromijenjena.

a) Kamatni račun od sto

Da bismo obračunali jednostavne kamate, koristimo postotni račun. Naime, onaj tko posuđuje novac na korištenje nekoj osobi kao naknadu za taj ustupak dobiva dio od svakih sto novčanih jedinica ili postotak. *Kamate* se zato računaju tako da određujemo *postotni dio glavnice*, u ovisnosti o tome koliki je zadani postotak. Budući da se postotni dio računa na osnovnu veličinu, možemo poistovijetiti osnovne elemente kamatnog računa i osnovne elemente postotnog računa na sljedeći način:

glavnicu C i osnovnu veličinu S
jednostavne kamate (uz dekurzivni obračun) K i postotni dio P
godišnji dekurzivni kamatnjak p(G) i postotak p.

Iz osnovnog postotnog razmjera

$$\boxed{S : 100 = P : p}$$

slijede izrazi za postotni dio P, odnosno iznos kamata K:

$$\boxed{P = \frac{S \cdot p}{100}} \qquad \boxed{K = \frac{C \cdot p(G)}{100}}$$

Izraz za kamate bi se mogao koristiti ukoliko bi vrijeme trajanja ukamaćivanja bilo jedna godina. Razdoblje ukamaćivanja je u praksi često veće od jedne godine. Kako tada obračunati kamatu?
Za prvu godinu jednostavne se kamate računaju uz pomoć izraza:

$$K = \frac{C \cdot p(G)}{100}.$$

Za dvije godine je iznos jednostavnih kamata dvostruk u odnosu na jednostavne kamate za jednu godinu (zato što je glavnica nepromijenjena, a vrijeme ukamaćivanja je dvostruko dulje):

$$K = \frac{C \cdot p(G)}{100} \cdot 2.$$

Analognim razmatranjem zaključujemo da je iznos jednostavnih kamata za n-tu godinu n-terostruk u odnosu na jednu godinu:

$$K = \frac{C \cdot p(G)}{100} \cdot n.$$

Želimo li gornju jednakost prikazati u obliku omjera, podijelit ćemo ju sa $n \cdot p(G)$ i dobiti:

$$\boxed{\frac{K}{n \cdot p(G)} = \frac{C}{100}}$$

ili ju zapisati u obliku osnovnog razmjera za jednostavni kamatni račun od sto dobit ćemo sljedeći izraz:

$$\boxed{C : 100 = K : (p(G) \cdot n).}$$

Usporedimo li gornji razmjer s osnovnim postotnim razmjerom, vidimo da se razlikuju samo u tome što se u kamatnom računu izračunavanje vrši uzimajući u obzir i vrijeme, za razliku od postotnog računa u kojem vrijeme nema nikakvu ulogu. Naime, kamatnjak je uvijek zadan za jedno vremensko razdoblje koje nazivamo osnovno vremensko razdoblje.
Ako je glavnica C posuđena uz kamatnu stopu p, nakon n godina zajmoprimac će zajmodavcu dugovati iznos glavnice C uvećan za iznos kamata K. Kako je C iznos koji je posuđen na početku, a C_n iznos koji će biti plaćen u budućnosti, nazivamo ga *konačna ili buduća vrijednost glavnice* C_n i izračunavamo ga kako slijedi:

$$C_n = C + K = C + \frac{C \cdot p(G)}{100} \cdot n$$

$$\boxed{C_n = C\left(1 + \frac{p(G) \cdot n}{100}\right).}$$

Primjer :

Kolika će biti konačna vrijednost glavnice u iznosu od 10.000,00 kn ako je ukamaćena dekurzivno na vrijeme od 1 godine uz godišnji kamatnjak 5?

Rješenje:

C = 10.000,00 kn
n = 1 g
p (G) = 5

$C_n = ?$

$$C_n = C\left(1+\frac{p(G)\cdot n}{100}\right) = 10.000,00\left(1+\frac{5\cdot 1}{100}\right) = 10.000,00(1+0,05) = 10.500,00$$

Konačna vrijednost glavnice iznosit će 10.500,00 kn.

Iz osnovnog razmjera za jednostavni kamatni račun od sto možemo izraziti:

Kamate: $\boxed{K = \frac{C\cdot p(G)\cdot n}{100}}$ *Kamatnjak:* $\boxed{p(G) = \frac{K\cdot 100}{C\cdot n}}$

Vrijeme: $\boxed{n = \frac{K\cdot 100}{C\cdot p(G)}}$ *Glavnicu*: $\boxed{C = \frac{K\cdot 100}{n\cdot p(G)}}$

Primjer:

Koliki iznos jednostavnih kamata donese glavnica od 5.000,00 kn ukamaćena na 3 godine uz godišnji kamatnjak 8? Ukamaćivanje je dekurzivno.

Rješenje:

C = 5.000,00 kn
$p(G)$ = 8
n = 3 g

K = ?

$$K = \frac{C\cdot p(G)\cdot n}{100} = \frac{5.000,00\cdot 8\cdot 3}{100} = 1.200,00$$

Jednostavne kamate iznose 1.200,00 kn.

Primjer:

Glavnica od 30.000,00 kn donese nakon 5 godina jednostavnih dekurzivnih kamata u iznosu od 5.000,00 kn. Koliki je godišnji kamatnjak?

Rješenje:

C = 30.000,00 kn
K = 5.000,00 kn
n = 5 g

$p(G)$ = ?

$$p(G) = \frac{K \cdot 100}{C \cdot n} = \frac{5.000{,}00 \cdot 100}{30.000{,}00 \cdot 5} = 3{,}3$$

Kamatnjak iznosi 3,3.

Primjer:

Za koliko mjeseci glavnica od 20.000,00 ukamaćena dekurzivno uz godišnji kamatnjak 10 donese jednostavnih kamata u iznosu od 6.000,00 kn?

Rješenje:

C = 20.000,00 kn
$p(G)$ = 10
K = 6.000,00 kn

---

n = ?

$$n = \frac{K \cdot 100}{C \cdot p(G)} = \frac{6.000{,}00 \cdot 100}{20.000{,}00 \cdot 10} = 3$$

Vrijeme je izraženo u godinama, pa ga je potrebno pretvoriti u mjesece: 3g = 36 mjeseci.

Primjer:

Koliko je uloženo u banku prije 2 godine ako je danas obračunata kamata u iznosu od 18.930,00 kn uz godišnji kamatnjak 6? Ukamaćivanje je jednostavno, godišnje i dekurzivno.

Rješenje:

K = 18.930,00 kn
$p(G)$ = 6
n = 2 g

$C = ?$

$$C = \frac{K \cdot 100}{n \cdot p(G)} = \frac{18.930,00 \cdot 100}{2 \cdot 6} = 157.750,00$$

Prije dvije godine uloženo je 157.750,00 kn.

U nastavku ćemo prikazati osnovne razmjere koji se koriste kada se vrijeme izražava u danima i mjesecima. U našoj zemlji se najčešće koristi e*ngleska metoda* po kojoj se za broj dana u godini uzima 365 (odnosno 366 u slučaju prijestupne godine). Broj dana se odredi kao umnožak $d = 365 \cdot n$ (odnosno $d = 366 \cdot n$). Tada je $n = \frac{d}{365}$ (odnosno $n = \frac{d}{366}$) pa osnovni razmjer za jednostavni kamatni račun kada se vrijeme izražava u danima izgleda ovako:

$$C:100 = K:(p(G) \cdot \frac{d}{365}) \qquad \text{(odnosno } C:100 = K:(p(G) \cdot \frac{d}{366}))$$

Gornji se izraz može zapisati jednostavnije:

$\boxed{C:36500 = K:(p(G) \cdot d)}$, a u slučaju prijestupne godine $\boxed{C:36600 = K:(p(G) \cdot d)}$.

Ukoliko se koristi f*rancuska ili njemačka metoda* obračuna kamata, tada se za broj dana u godini uzima 360. Osnovni razmjer za jednostavni kamatni račun tada izgleda ovako:

$\boxed{C:36000 = K:(p(G) \cdot d)}$.

Sličnim razmatranjem dobije se osnovni razmjer za jednostavni kamatni račun kada se vrijeme izražava u mjesecima. Budući da godina ima 12 mjeseci, broj mjeseci se odredi kao umnožak $m = 12 \cdot n$. Tada je $n = \frac{m}{12}$ pa osnovni razmjer za jednostavni kamatni račun kada se vrijeme izražava u mjesecima poprima sljedeći oblik:

$$C:100 = K:(p(G) \cdot \frac{m}{12})$$

Nakon pojednostavljenja slijedi konačni oblik:

$\boxed{C:12000 = K:(p(G) \cdot m)}$.

Primjer:

Koliko je dana bila ukamaćena glavnica od 15.500,00 ako je donijela 800,00 kn jednostavnih kamata uz godišnji kamatnjak od 10 i godišnje dekurzivno ukamaćivanje?

Rješenje:

C = 15.500,00 kn
K = 800,00 kn
$p(G)$ = 10

---

d = ?

Iz osnovnog razmjera izrazimo d i uvrstimo zadane vrijednosti:

$$d = \frac{K \cdot 36500}{C \cdot p(G)} = \frac{800{,}00 \cdot 36500}{15.500{,}00 \cdot 10} = 188{,}38$$

Glavnica je bila ukamaćena 188 dana.

U gornjem primjeru koristili smo se engleskom metodom obračuna kamata i pretpostavili smo da godina nije prijestupna, tj. da je broj dana u godini jednak 365. Ukoliko se ne napomene kojom metodom će se vršiti obračun, koristit će se engleska metoda. Također, ukoliko se ne navede točno koja je godina, pretpostavit ćemo da ona nije prijestupna.
Engleska, francuska i njemačka metoda razlikuju se ne samo u tome što različito računaju broj dana u godini nego i po tome što različito računaju broj dana u mjesecima.

Francuska metoda: godina ima 360 dana, a broj dana u svakom pojedinom mjesecu se računa prema kalendaru.

Njemačka metoda: godina ima 360 dana, a broj dana u svakom mjesecu je 30.

Engleska metoda: godina ima 365 ili 366 dana, a broj dana u svakom pojedinom mjesecu se računa prema kalendaru.

Primjer:

Poduzeću je odobren kratkoročni kredit za isplatu plaća u iznosu od 300.000,00 kn uz 6% godišnjih kamata za vrijeme od 15.1. do 26.6. iste godine uz dekurzivni obračun kamata. Odredite iznos jednostavnih kamata prema:

a) francuskoj metodi
b) njemačkoj metodi
c) engleskoj metodi.

Rješenje:

C = 300.000,00 kn

p(G) = 6
d = od 15.01. do 26. 06.

K = ?

Prvi je korak odrediti broj dana po svakoj od navedenih metoda:

METODA	BROJ DANA U MJESECU						
	Siječanj	**Veljača**	**Ožujak**	**Travanj**	**Svibanj**	**Lipanj**	**UKUPNO**
francuska	16	28	31	30	31	26	**162**
njemačka	15	30	30	30	30	26	**161**
engleska	16	28	31	30	31	26	**162**

Treba naglasiti da se kod sve tri metode slijedi pravilo da se prvi datum ne uzima u obračun za razliku od zadnjeg. Za naš primjer to znači da se 15. dan u siječnju nije obračunao dok se 26. dan u lipnju uzeo u obračun.

Odredit ćemo iznose jednostavnih kamate primjenom svake od navedenih metoda:

a) prema francuskoj metodi:

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot d_f}{36.000} = \frac{300.000{,}00 \cdot 6 \cdot 162}{36.000} = 8.100{,}00 \text{ kn}$$

b) prema njemačkoj metodi:

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot d_{nj}}{36.000} = \frac{300.000{,}00 \cdot 6 \cdot 161}{36.000} = 8.050{,}00 \text{ kn}$$

c) prema engleskoj metodi:

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot d_e}{36.500} = \frac{300.000 \cdot 6 \cdot 162}{36.500} = 7.989{,}04 \text{ kn}$$

b) Kamatni račun više i niže sto

U slučajevima kada nam je poznata vrijednost glavnice uvećane ili umanjene za iznos kamata, a potrebno je odrediti vrijednost glavnice i/ili kamata koristimo kamatni račun više ili niže sto. Krećemo od osnovnog razmjera za jednostavni kamatni račun od sto:

$$\boxed{C : 100 = K : (p(G)n)}$$

U nastavku se koriste pravila razmjera prikazana u prethodnom poglavlju koja govore o tome kako iz početnog razmjera doći do novih valjanih razmjera. Koristeći pravilo 4 dolazimo do sljedećeg razmjera:

$$\boxed{C : K = 100 : (p(G \cdot n))}$$

Sada na gornji omjer primijenimo pravilo 5 i dolazimo do sljedećih razmjera:

$$\boxed{(C \pm K) : (100 \pm p(G) \cdot n) = C : 100}$$

$$\boxed{(C \pm K) : (100 \pm p(G) \cdot n) = K : (p(G)n)}$$

Iz gornjih razmjera, koji vrijede kada je vrijeme zadano u godinama, slijede izrazi za glavnicu C i kamate K:

$$\boxed{C = \frac{(C \pm K) \cdot 100}{100 \pm p(G) \cdot n}} \qquad \boxed{K = \frac{(C \pm K) \cdot p(G) \cdot n}{100 \pm p(G) \cdot n}}$$

Ukoliko je vrijeme zadano u mjesecima glavnica i kamate određuju se kako slijedi:

$$\boxed{C = \frac{(C \pm K) \cdot 1200}{1200 \pm p(G) \cdot m}} \qquad \boxed{K = \frac{(C \pm K) \cdot p(G) \cdot m}{1200 \pm p(G) \cdot m}}$$

Za vrijeme izraženo danima koristimo sljedeći izraz:

$$\boxed{K = \frac{(C \pm K) \cdot p(G) \cdot d}{36.500 \pm p(G) \cdot d}}$$

U slučaju prijestupne godine izrazi za glavnicu i kamate su:

$$\boxed{C = \frac{(C \pm K) \cdot 36.600}{36.600 \pm p(G) \cdot d}} \qquad \boxed{K = \frac{(C \pm K) \cdot p(G) \cdot d}{36.600 \pm p(G) \cdot d}}$$

Primjer:

Zajam od 8.000,00 kn, odobren 15. srpnja, dužnik je vratio zajedno s pripadajućim jednostavnim kamatama od 7% godišnje, što je ukupno iznosilo 8.350,00 kn. Kojega je datuma podmireno dugovanje ako je ukamaćivanje dekurzivno?

Rješenje:

C = 8.000,00 kn
$p(G)$ = 7
$C + K$ = 8.350,00 kn

---

datum = ?

K = (C + K) – C = 8.350,00 – 8.000,00 = 350,00

$$d = \frac{K \cdot 36500}{C \cdot p(G)} = \frac{350 \cdot 36500}{8.000 \cdot 7} = 228.125 \approx 228 \text{ dana}$$

Da bismo odredili točan datum kada je vraćen zajam računamo 228 dana od 15. srpnja:

u srpnju		16 dana
u kolovozu		31 dan
u rujnu		30 dana
u listopadu		31 dan
u studenom		30 dana
u prosincu		31 dan
u siječnju		31 dan
	Ukupno:	200 dana

228 dana – 200 dana = 28 dana $\Rightarrow$ konačan datum: 28.veljače sljedeće godine.

Primjer:

Nakon odbitka 6% kamata od zajma za razdoblje od 1. svibnja do 30. lipnja banka je isplatila dužniku ostatak od 30.450,00 kn. Koliko su iznosile jednostavne kamate ako je obračun bio godišnji i dekurzivan?

Rješenje:

C – K = 30.450,00 kn
p(G) = 6
d = od 1. svibnja do 30. lipnja = 60 dana (30 dana u svibnju i 30 dana u lipnju)

K = ?

$$K = \frac{(C-K)\cdot p(G)\cdot d}{36.500 - p(G)\cdot d} = \frac{30.450\cdot 6\cdot 60}{36.500 - 6\cdot 60} = 303{,}32$$

Jednostavne kamate su iznosile 303,32 kn.

Primjer:

Iznos uložen uz kamatnjak p za vrijeme od 30 mjeseci narastao je na 134. 567,00 kn. Isti iznos uložen uz godišnji kamatnjak (p+1) % i jednostavno ukamaćivanje nakon 24 mjeseca povećao se na 130.000,00 kn. Izračunajte koliki je iznos i pripadni godišnji kamatnjak.

Rješenje:

$$m_1 = 30$$
$$m_2 = 24$$
$$(C+K)_1 = 134.567{,}00 \text{ kn}$$
$$(C+K)_2 = 130.000{,}00 \text{ kn}$$

$$C + \frac{C \cdot p(G) \cdot 30}{1200} = 134.567{,}00$$
$$C + \frac{C(p(G)+1) \cdot 24}{1200} = 130.000{,}00$$

$$C\left(1 + \frac{p(G)}{40}\right) = 134.567{,}00$$

$$C\left(1 + \frac{p(G)+1}{50}\right) = 130.000{,}00$$

$$C\left(\frac{40 + p(G)}{40}\right) = 134.567{,}00$$

$$C\left(\frac{50 + p(G)+1}{50}\right) = 130.000{,}00$$

Izrazit ćemo glavnicu C iz gornjih jednadžbi:

$C = \frac{134.567{,}00 \cdot 40}{40 + p(G)}$ $\quad C = \frac{130.000{,}00 \cdot 50}{51 + p(G)}$ što nakon izjednačenja daje:

$\frac{134.567{,}00 \cdot 40}{40 + p(G)} = \frac{130.000{,}00 \cdot 50}{51 + p(G)}$ ili

5.382.680,00(51+p(G)) = 6.500.000,00(40+p(G))

274.516.680,00+5.382.680,00p(G) =260.000.000,00+6.500.000,00p(G)

14.516.680,00 = 1.117.320,00 p(G)

p(G) = 12.99 $\approx$ 13

Dakle, kamatnjak iznosi približno 13%. Da bismo došli do uloženog iznosa C, uvrstit ćemo dobiveni kamatnjak u prvi od dva gornja izraza za C:

$$C=\frac{134.567,00\cdot 40}{40+13}=101.560,00\,\text{kn}$$

<u>Štedni ulozi po viđenju</u>

"Štednja predstavlja suzdržavanje od potrošnje materijalnih dobara ili novca" (Šego, 2008.,str. 112.). Nakon sklapanja ugovora o štednji između banke i ulagača, banka otvara račun po viđenju i izdaje ulagaču štednu knjižicu ili tekući račun i izdaje karticu.
Građani su stimulirani za štednju radi kamata, kao naknade za korištenje njihovog novca, koje će im banka isplatiti u određenom vremenskom razdoblju. Banke nastoje privući što je više moguće novca od građana kako bi u ulozi posrednika između onih koji imaju viška novca i onih koji imaju manjka novca ostvarile što je moguće veću zaradu. Budući da su štedni ulozi kojima raspolaže banka znatni, potrebno je radi smanjenja rizika od neuspješnih bankarskih ulaganja zaštititi interes građana. Presudnu ulogu u tome ima Hrvatska narodna banka kao kontrolor rada banaka, a država preko Državne agencije za sanaciju banaka jamči za isplatu štednih uloga do određenog iznosa koji se mijenja i trenutno iznosi 400 000 kuna. Štedni ulozi se razlikuju po tome jesu li na raspolaganju ulagačima kada god oni žele ili su oročeni na određeno vrijeme, tj. nedostupni za ulagače tijekom određenog vremenskog razdoblja. U prvom slučaju radi se o štednim ulozima po viđenju ili "a vista", a u drugom slučaju radi se o oročenim štednim ulozima. Banke većim iznosima kamata stimuliraju oročenu štednju građana.

U sljedećem primjeru ćemo izračunati ukupan iznos kamata na kraju godine za a vista depozit.

Primjer:

Koliki će iznos kamata Ana dobiti za 2007 godinu ako su na njezinoj štednoj knjižici tijekom godine upisani sljedeći podatci:

DATUM	ISPLATA	UPLATA	STANJE
10. 1. 2007.		2.500,00	2.500,00
18. 1. 2007.	1.000,00		1.500,00
8. 2. 2007.		4.500,00	6.000,00
10. 2. 2007.	3.000,00		3.000,00
5. 3. 2007.	1.000,00		2.000,00
21. 4. 2007.		3.800,00	5.800,00
1. 5. 2007.		1.000,00	6.800,00
18. 6. 2007.	4.800,00		2.000,00
20. 7. 2007.		3.500,00	5.500,00
3. 10. 2007.	2.000,00		3.500,00
8. 11. 2007.		500,00	4.000,00
24. 11. 2007.	3.000,00		1.000,00

Za određivanje iznosa kamata na kraju godine na raspolaganju su nam dva načina:

1. način obračuna kamata

Odredimo broj dana za svaku isplatu i uplatu od datuma isplate ili uplate do kraja obračunskog razdoblja. Zatim izračunamo kamate jednostavnim kamatnim računom. Iznos kamata jednak je razlici ukupnih kamata za sve uplate i ukupnih kamata za sve isplate:

I	UPLATA U(i)	DATUM UPLATE	UKAMAĆIVANJE OD – DO	BROJ DANA d(i)
1	2.500,00	10. 1. 2007.	10. 1. – 31. 12. 2007.	355
2	4.500,00	8. 2. 2007.	8. 2. – 31. 12. 2007.	326
3	3.800,00	21. 4. 2007.	21. 4. – 31. 12. 2007.	254
4	1.000,00	1. 5. 2007.	1. 5. – 31. 12. 2007.	244
5	3.500,00	20. 7. 2007.	20. 7. – 31. 12. 2007.	164
6	500,00	8. 11. 2007.	8. 11. – 31. 12. 2007.	53

Kamate uplata iznose:

$$K_{U1} = \frac{2.500 \cdot 5 \cdot 355}{36500} = 121{,}58$$

$$K_{U2} = \frac{4.500 \cdot 5 \cdot 326}{36500} = 200{,}96$$

$$K_{U3} = \frac{3.800 \cdot 5 \cdot 254}{36500} = 132{,}22$$

$$K_{U4} = \frac{1.000 \cdot 5 \cdot 244}{36500} = 33{,}42$$

$$K_{U5} = \frac{3.500 \cdot 5 \cdot 164}{36500} = 78{,}63$$

$$K_{U6} = \frac{500 \cdot 5 \cdot 53}{36500} = 3{,}63$$

Zbroj svih kamata uplata iznosi:

$$K_U = 121{,}58 + 200{,}96 + 132{,}22 + 33{,}42 + 78{,}63 + 3{,}63 = 570{,}44.$$

Analogno izračunamo kamate svih isplata:

I	ISPLATA I(i)	DATUM ISPLATE	UKAMAĆIVANJE od – do	BROJ DANA d(i)
1	1.000,00	18. 1. 2007.	18. 1. – 31. 12. 2007.	347
2	3.000,00	10. 2. 2007.	10. 2. – 31. 12. 2007.	324

3	1.000,00	5. 3. 2007.	5. 3. – 31. 12. 2007.	301
4	4.800,00	18. 6. 2007.	18. 6. – 31. 12. 2007.	196
5	2.000,00	3. 10. 2007.	3. 10. – 31. 12. 2007.	89
6	3.000,00	24. 11. 2007.	24. 11. – 31. 12. 2007.	37

Kamate isplata iznose:

$$K_{I2} = \frac{1.000 \cdot 5 \cdot 347}{36500} = 47{,}53 \qquad K_{I4} = \frac{4.800 \cdot 5 \cdot 196}{36500} = 128{,}88$$

$$K_{I2} = \frac{3.000 \cdot 5 \cdot 324}{36500} = 133{,}15 \qquad K_{I5} = \frac{2.000 \cdot 5 \cdot 89}{36500} = 24{,}38$$

$$K_{I3} = \frac{1.000 \cdot 5 \cdot 301}{36500} = 41{,}23 \qquad K_{I6} = \frac{3.000 \cdot 5 \cdot 37}{36500} = 15{,}21$$

Zbroj svih kamata isplata iznosi:

$$K_I = 47{,}53 + 133{,}15 + 41{,}23 + 128{,}88 + 24{,}38 + 15{,}21 = 390{,}38$$

Ukupne jednostavne kamate K bit će jednake razlici ukupnih kamata uplata i ukupnih kamata isplata:

$K = K_U - K_I$ = 570,44 – 390,38 = 180,06 kn

2. način obračuna kamata

Za svako stanje se izračunaju dani koji su protekli od datuma tog stanja do datuma kada je nastupilo sljedeće stanje. Za posljednje stanje računaju se dani protekli od tog stanja do kraja obračunskog razdoblja, tj. do kraja godine. Za svako stanje se obračunaju pripadne jednostavne kamate, a njihov zbroj predstavlja ukupne kamate.

Stanje (C_i)	Datum stanja	Ukamaćivanje od – do	Broj dana d(i)
2.500,00	10. 1. 2007.	10. 1. – 18. 1. 2007.	8
1.500,00	18. 1. 2007.	18. 1. – 8. 2. 2007.	21
6.000,00	8. 2. 2007.	8. 2. – 10. 2. 2007.	2
3.000,00	10. 2. 2007.	10. 2. – 5. 3. 2007.	23
2.000,00	5. 3. 2007.	5. 3. – 21. 4. 2007.	47
5.800,00	21. 4. 2007.	21. 4. – 1. 5. 2007.	10
6.800,00	1. 5. 2007.	1. 5. – 18. 6. 2007.	48
2.000,00	18. 6. 2007.	18. 6. – 20. 7. 2007.	32
5.500,00	20. 7. 2007.	20. 7. – 3. 10. 2007.	75
3.500,00	3. 10. 2007.	3. 10. – 8. 11. 2007.	36
4.000,00	8. 11. 2007.	8. 11. – 24. 11. 2007.	16
1.000,00	24. 11. 2007.	24. 11. – 31. 12. 2007.	37

$$K_1 = \frac{2.500 \cdot 5 \cdot 8}{36500} = 2,74$$

$$K_2 = \frac{1.500 \cdot 5 \cdot 21}{36500} = 4,32$$

$$K_3 = \frac{6.000 \cdot 5 \cdot 2}{36500} = 1,64$$

$$K_4 = \frac{3.000 \cdot 5 \cdot 23}{36500} = 9,45$$

$$K_5 = \frac{2.000 \cdot 5 \cdot 47}{36500} = 12,88$$

$$K_6 = \frac{5.800 \cdot 5 \cdot 10}{36500} = 7,95$$

$$K_7 = \frac{6.800 \cdot 5 \cdot 48}{36500} = 44,71$$

$$K_8 = \frac{2.000 \cdot 5 \cdot 32}{36500} = 8,77$$

$$K_9 = \frac{5.500 \cdot 5 \cdot 75}{36500} = 56,51$$

$$K_{10} = \frac{3.500 \cdot 5 \cdot 36}{36500} = 17,26$$

$$K_{11} = \frac{4.000 \cdot 5 \cdot 16}{36500} = 8,77$$

$$K_{12} = \frac{1.000 \cdot 5 \cdot 37}{36500} = 5,07$$

Konačno, ukupne kamate iznose:

$$K = \sum_{i=1}^{12} K_i = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_{12} = 180,07 \text{ kn.}$$

Razlika od 1 lipe između ukupnog iznosa kamata koje smo odredili na dva različita načina posljedica je zaokruživanja pojedinih iznosa kamata i ne igra značajnu ulogu.
Kako smo vidjeli u prethodnom primjeru obračuna godišnjih kamata, način na koji smo došli do rješenja nepraktičan je i relativno dugotrajan, naročito ako se tijekom godine vrši veći broj uplata, odnosno isplata. Zato se u praksi jednostavne ukupne kamate izračunavaju uz pomoć kamatnih brojeva i divizora. Da bismo prikazali navedeno, krećemo iz izraza za kamate za svaku glavnicu C_i ukamaćenu d_i dana uz dekurzivni godišnji kamatnjak *p(G):*

$$K_i = \frac{C_i \cdot p(G) \cdot d_i}{36.500} \quad i = 1,2 \ldots n.$$

Gornji se izraz može zapisati u obliku dvojnog razlomka kako slijedi:

$$K_i = \frac{\dfrac{C_i d_i}{100}}{\dfrac{365}{p(G)}} = \frac{N_i}{D} \qquad i = 1,2 \ldots n.$$

Brojnik gornjeg dvojnog razlomka nazivamo *kamatni broj* i označavamo ga sa N_i, a njegov nazivnik je *kamatni divizor* označen sa *D*. Kamatni broj je vrijednost koja se određuje za svaku pojedinu glavnicu i pripadno vrijeme trajanja njezinog ukamaćivanja, dok je kamatni divizor stalna vrijednost, određena godišnjim kamatnjakom i brojem dana u godini.

Kako su ukupne kamate K_u jednake zbroju pojedinih kamata K_i, slijedi:

$$\boxed{K_u = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{D}}.$$

Da bismo prikazali gornji način obračuna jednostavnih kamata, vratit ćemo se prethodnom primjeru obračuna:

1. način

Krećemo od izračunavanja kamatnih brojeva uplata N_i i isplata N_i^*:

$$N_1 = \frac{C_1 d_1}{100} = \frac{2.500,00 \cdot 355}{100} = 8.875,00 \qquad N_1^* = \frac{C_1 d_1}{100} = \frac{1.000,00 \cdot 347}{100} = 3.470,00$$

$$N_2 = \frac{C_2 d_2}{100} = \frac{4.500,00 \cdot 326}{100} = 14.670,00 \qquad N_2^* = \frac{C_2 d_2}{100} = \frac{3.000,00 \cdot 324}{100} = 9.720,00$$

$$N_3 = \frac{C_3 d_3}{100} = \frac{3.800,00 \cdot 254}{100} = 9.652,00 \qquad N_3^* = \frac{C_3 d_3}{100} = \frac{1.000,00 \cdot 301}{100} = 3.010,00$$

$$N_4 = \frac{C_4 d_4}{100} = \frac{1.000,00 \cdot 244}{100} = 2.440,00 \qquad N_4^* = \frac{C_4 d_4}{100} = \frac{4.800,00 \cdot 196}{100} = 9.408,00$$

$$N_5 = \frac{C_5 d_5}{100} = \frac{3.500,00 \cdot 164}{100} = 5.740,00 \qquad N_5^* = \frac{C_5 d_5}{100} = \frac{2.000,00 \cdot 89}{100} = 1.780,00$$

$$N_6 = \frac{C_6 d_6}{100} = \frac{500,00 \cdot 53}{100} = 265,00 \qquad N_6^* = \frac{C_6 d_6}{100} = \frac{3.000,00 \cdot 37}{100} = 1.110,00$$

$$\sum_{i=1}^{6} N_i = 41.642,00 \qquad \sum_{i=1}^{6} N_i^* = 28.498,00$$

$$D = \frac{365}{p(G)} = \frac{365}{5} = 73$$

Ukupne jednostavne kamate odredit ćemo pomoću sljedećeg izraza:

$$K_u = \frac{\sum_{i=1}^{6} N_i - \sum_{i=1}^{6} N_i^*}{D} = \frac{41.642,00 - 28.498,00}{73} = 180,05 \text{ kn.}$$

Drugi način se od prvoga razlikuje u tome što se kamatni brojevi izračunavaju za svako stanje, a ukupne jednostavne kamate se zatim izračunaju pomoću izraza:

$$\boxed{K_u = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{D}}$$

<u>Račun mjenica</u>

Mjenica je vrijednosni papir koji sadrži obvezu fizičke ili pravne osobe da točno utvrđenog datuma isplati nekoj osobi određeni iznos novca. Razlikujemo *vlastite* mjenice od *trasiranih* mjenica. Naime, vlastita mjenica sadrži obvezu izdavatelja da će sam isplatiti mjenični iznos vjerovniku na datum koji je naveden na mjenici. U slučaju trasirane mjenice izdavatelj mjenice nalaže nekoj drugoj osobi da na točno utvrđeni datum isplati vjerovniku mjenični iznos ili da to učini po njegovom nalogu.
Mjenica se može iskupiti ili prodati:

1. na datum koji je naveden na mjenici (datum dospijeća mjenice)
2. prije datuma dospijeća mjenice
3. nakon datuma dospijeća mjenice.

Ukoliko se mjenica prodaje ili iskupljuje na datum dospijeća mjenice, prodaje se ili isplaćuje mjenični iznos (nominalna vrijednost mjenice).
Ako se mjenica prodaje ili iskupljuje prije datuma dospijeća, prodaje se ili isplaćuje nominalni iznos mjenice umanjen za kamate (diskont).
Nakon dospijeća mjenice ona se prodaje ili iskupljuje tako da se nominalnom iznosu pribrajaju kamate.
Kada se mjenica prodaje ili kupuje, banka ostvaruje zaradu tako da zaračunava proviziju od diskontirane vrijednosti mjenice kao i troškove koji nastaju prodajom odnosno kupovinom mjenice.

Primjer:

Mjenica glasi na 100.000,00 kn i dospijeva 24. lipnja. Kolika je njezina vrijednost:
a) 14. svibnja
b) 1. srpnja
iste godine, ako je godišnji kamatnjak p(G) = 6?

Rješenje:

a) Najprije ćemo izračunati kamate za vrijeme od 14. svibnja do 24. lipnja, tj. za 41 dan:

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot d}{36.500} = \frac{100.000{,}00 \cdot 6 \cdot 41}{36.500} = 673{,}97 \text{ kn}$$

Da bismo odredili vrijednost mjenice na datum 14. svibnja (prije datuma dospijeća) od nominalne vrijednosti mjenice oduzet ćemo pripadni iznos kamata:

100.000,00- 673,97 = 99.326,03 kn što predstavlja diskontiranu vrijednost mjenice.

b) Kamate za vrijeme od 24. lipnja do 1. srpnja, tj. za 7 dana iznose:

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot d}{36.500} = \frac{100.000{,}00 \cdot 6 \cdot 7}{36.500} = 115{,}07 \text{ kn.}$$

Da bismo odredili vrijednost mjenice na datum 1. srpnja (nakon datuma dospijeća), nominalnom iznosu mjenice pribrojit ćemo iznos kamata:

100.000,00 + 115,07 = 100.115,07 kn, što je jednako eskontiranoj vrijednosti mjenice.

Primjer:

Obračunajte prodaju mjenice na iznos od 25.000,00 kn plativu 24. listopada 2009. koju je poduzeće prodalo banci 7. rujna uz 8% diskonta, 3 promila provizije i 50 kn troškova.

Uputa: Kako se provizija računa od diskontirane vrijednosti mjenice, najprije odredimo diskontiranu vrijednost mjenice, a zatim dobivenoj vrijednosti pribrojimo iznos provizije i troškove.

Rješenje:

Kamate za razdoblje od 7. rujna do 24. listopada 2009., tj. za 47 dana:

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot d}{36.500} = \frac{25.000{,}00 \cdot 8 \cdot 47}{36.500} = 257{,}53 \text{ kn.}$$

Izračunat ćemo diskontiranu vrijednost mjenice:

S = 25.000,00 – 257,53 = 24.742,47 kn.

Na diskontiranu vrijednost mjenice obračunava se provizija u promilima:

$$P = \frac{S \cdot p(G)}{1.000} = \frac{24.742{,}47 \cdot 3}{1.000} = 74{,}23 \text{ kn.}$$

Od diskontirane vrijednosti mjenice oduzet ćemo iznos provizije i bankarske troškove i dobiti vrijednost mjenice s datumom 7. 9. 2009. Navedeni koraci prikazani su u tabeli koja slijedi.

		Datum dospijeća
a) Nominalni iznos mjenice	25.000,00	24. 10. 2009.
b) Iznos kamata (diskont 8 %)	257,53	7. 9. 2009.
c) Diskont.vrijednost mjenice (vrijednost mjenice umanjena za iznos kamata)	24.742,47 (a – b)	7. 9. 2009.
d) Iznos provizije (3 promila na diskontiranu vrijednost mjenice)	74,23	
e) Obračunati troškovi (bankarski troškovi)	50,00	
f) Vrijednost mjenice (diskontirana vrijednost mjenice umanjena za iznos provizije i troškova)	24.618,24 (c – d – e)	7. 9. 2009.

Primjer:

Poduzeće 7. 9. podmiruje dugovanje u iznosu od 35.567,00 kn mjenicom plativom 13. 10. iste godine. Odredite nominalni iznos mjenice ako je godišnji kamatnjak 5!

Rješenje:

C – K = 35.567,00 kn
p(G) = 5

Da bismo odredili nominalni iznos mjenice, koristit ćemo kamatni račun niže sto jer je poznata nominalna vrijednost mjenice umanjena za kamatu za razdoblje od 7. 9. do 13. 10. iste godine.

Broj dana od 7. 9. do 13. 10. = 23 + 13 = 36

$$C = \frac{(C-K)\cdot 36.500}{36.500 - p(G)\cdot d} = \frac{35.567{,}00\cdot 36.500}{36.500 - 5\cdot 36} = 35.743{,}27\,\text{kn}$$

U praksi se često mjenica zamjenjuje novom mjenicom ili se nekoliko mjenica sa različitim dospijećima zamjenjuje novom mjenicom. U takvim se slučajevima za novu mjenicu određuje srednji rok plaćanja koristeći *načelo ekvivalencije mjenica* koje kaže: *dvije su mjenice ekvivalentne ako određenog datuma imaju jednake diskontirane vrijednosti.* Kod izračunavanja srednjeg dospijeća odaberemo proizvoljni datum i nazivamo ga *epoha.* U nastavku ćemo prikazati kako se određuje srednji rok plaćanja (Relić, 2002).

Zadane su nominalne vrijednosti *n* mjenica $C_1, C_2 ... C_n$ koje dospijevaju za $d_1, d_2 ... d_n$ dana uz godišnje kamatnjake $p_1(G), p_2(G) ... p_n(G)$ dok je srednji rok plaćanja d. Kamate za nominalni mjenični iznos C_i, dospijeće d_i i godišnji kamatnjak $p_i(G)$ su jednake:

$$\boxed{K_i = \frac{C_i \cdot p_i(G)\cdot d_i}{36.500}}.$$

Kamate za nominalni mjenični iznos C_i, srednji rok plaćanja d i godišnji kamatnjak $p_i(G)$ su jednake:

$$\boxed{\hat{K}_i = \frac{C_i \cdot p_i(G) \cdot d}{36.500}}.$$

Načelo ekvivalencije kapitala [2] osigurava jednakost navedenih ukupnih kamata:

$\sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{K}_i$ iz čega slijede jednakosti:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i \cdot p_i(G) \cdot d_i}{36.500} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i \cdot p_i(G) \cdot d}{36.500}$$

$$\frac{1}{36.500} \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot p_i(G) \cdot d_i = \frac{d}{36.500} \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot p_i(G),$$

odakle nakon dijeljenja jednakosti s $\sum_{i=1}^{n} C_i p_i(G)$ slijedi izraz za srednji rok plaćanja:

$$\boxed{d = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot p_i(G) \cdot d_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot p_i(G)}}$$

Primjer:

Tri mjenice glase:

12.000,00 kn s dospijećem za 12 dana i ukamaćivanjem 5% godišnje,
14.000,00 kn s dospijećem za 14 dana i ukamaćivanjem 6% godišnje,
16.000,00 kn s dospijećem za 16 dana i ukamaćivanjem 8% godišnje.

Odredite za koliko dana dospijeva nova mjenica koja zamjenjuje sve tri mjenice i jednaka je zbroju njihovih nominalnih vrijednosti!

Rješenje:

Budući da sve tri mjenice zamjenjujemo jednom, najprije ćemo odrediti srednji rok plaćanja:

---

[2] Načelo financijske ekvivalencije kapitala temelji se na jednakosti $C_n = C_0 r^n$

$$d=\frac{C_1\cdot p_1(G)\cdot d_1+C_2\cdot p_2(G)\cdot d_2+C_3\cdot p_3(G)\cdot d_3}{C_1\cdot p_1(G)+C_2\cdot p_2(G)+C_3\cdot p_3(G)}=$$

$$\frac{12.000{,}00\cdot 5\cdot 12+14.000{,}00\cdot 6\cdot 14+16.000{,}00\cdot 8\cdot 16}{12.000{,}00\cdot 5+14.000{,}00\cdot 6+16.000{,}00\cdot 8}=14.5\approx 15 \text{ dana.}$$

Nova mjenica na iznos od 42.000,00 kn (zbroj nominalnih vrijednosti triju mjenica koje zamjenjuje: 12.000,00 + 14.000,00 + 16.000,00 = 42.000,00) dospijeva za 15 dana.
Ukoliko nam nije poznato za koliko dana dospijeva mjenica, nego znamo datum dospijeća mjenice, računamo dane od epohe (koju sami odaberemo) do datuma dospijeća pojedine mjenice. Sljedeći primjer prikazuje navedeno.

Pr**imjer:**

Tri mjenice glase:

12.000,00 kn s dospijećem 3. 3. 2009. i ukamaćivanjem 5% godišnje
14.000,00 kn s dospijećem 4. 4. 2009. i ukamaćivanjem 6% godišnje
16.000,00 kn s dospijećem 5. 5. 2009. i ukamaćivanjem 8% godišnje.
Te se mjenice zamjenjuju novom koja je jednaka zbroju njihovih nominalnih iznosa. Odredite datum dospijeća nove mjenice!

Rješenje:

Odabrat ćemo epohu tako da ona bude jednaka datumu prve mjenice dakle 3. 3. 2008.
Sada ćemo odrediti broj dana od epohe do datuma dospijeća svake pojedine mjenice:

12.000,00 kn	3. 3. 2008. – 3. 3. 2009.	0 dana	5%
14.000,00 kn	3. 3. 2008. – 4. 4. 2009.	32 dana	6%
16.000,00 kn	3. 3. 2008. – 5. 5. 2009.	63 dana	8%

U nastavku određujemo broj dana:

$$d=\frac{\sum_{i=1}^{n}C_i\cdot p_i(G)\cdot d_i}{\sum_{i=1}^{n}C_i\cdot p_i(G)}=\frac{C_1\cdot p_1(G)\cdot d_1+C_2\cdot p_2(G)\cdot d_2+C_3\cdot p_3(G)\cdot d_3}{C_1\cdot p_1(G)+C_2\cdot p_2(G)+C_3\cdot p_3(G)}$$

$$\frac{12.000{,}00\cdot 5\cdot 0+14.000{,}00\cdot 6\cdot 32+16.000{,}00\cdot 8\cdot 63}{12.000{,}00\cdot 5+14.000{,}00\cdot 6+16.000{,}00\cdot 8}\approx 39{,}5\approx 40 \text{ dana.}$$

Da bismo odredili datum dospijeća mjenice, brojimo 40 dana od datuma epohe:

3. 3. 2008. + 40 dana = 12. 4. 2009. (28 dana do 31. 3. 2009. + 12 dana u 4. mjesecu).

Ukoliko su vrijednosti kamatnjaka ili/i nominalnih iznosa mjenica jednaki, izraz za srednji rok plaćanja može se znatno pojednostaviti. To će ubrzati i olakšati postupak izračunavanja nepoznatih vrijednosti. U nastavku ćemo prikazati takve mogućnosti.

a) Iznos nominalnih vrijednosti mjenica je jednak, tj. $C_i = C$. Izraz za srednji rok plaćanja tada poprima sljedeći oblik:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} C \cdot p_i(G) \cdot d_i}{\sum_{i=1}^{n} C \cdot p_i(G)} = \frac{C \sum_{i=1}^{n} p_i(G) \cdot d_i}{C \sum_{i=1}^{n} p_i(G)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(G) \cdot d_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i(G)}$$

$$\boxed{d = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(G) \cdot d_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i(G)}}$$

b) Mjenice imaju jednake nominalne vrijednosti, tj. $C_i = C$, i kamatnjake, tj. $p_i(G) = p(G)$. Izraz za srednji rok plaćanja tada poprima oblik:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} C \cdot p_i(G) \cdot d_i}{\sum_{i=1}^{n} C \cdot p_i(G)} = \frac{C \cdot p(G) \sum_{i=1}^{n} d_i}{C \cdot p(G) \sum_{i=1}^{n} 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$\boxed{d = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}}$$

U sljedećem primjeru prikazat ćemo kako se određuje nominalni iznos mjenice kojom zamjenjujemo druge mjenice, a rok dospijeća nove mjenice nalazi se unutar intervala rokova dospijeća drugih mjenica:

Primjer:

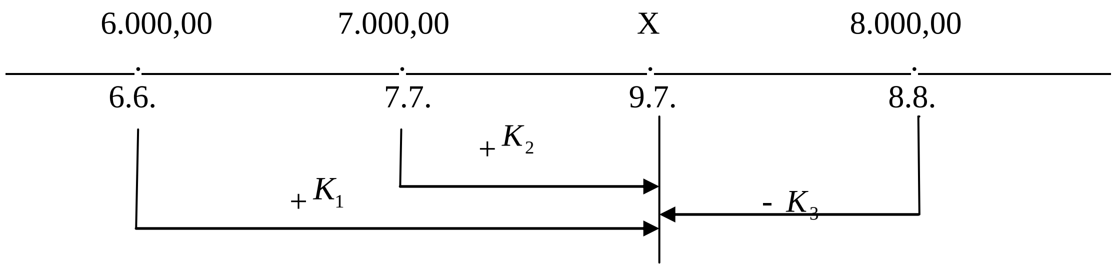
Tri mjenice glase:

6.000,00 kn s dospijećem 6. 6. 2009.
7.000,00 kn s dospijećem 7. 7. 2009.
8.000,00 kn s dospijećem 8. 8. 2009.

i potrebno ih je zamijeniti novom mjenicom s dospijećem na datum 9. 7. 2009. Koji će nominalni iznos biti na novoj mjenici, ako je godišnji diskont 10?

Rješenje:

Rok dospijeća nove mjenice je unutar intervala rokova dospijeća mjenica koje ona zamjenjuje pa ćemo, radi boljeg razumijevanja, prikazati navedeno grafički.



Mjenicama koje dospijevaju prije datuma 9. 7. 2009. ćemo odrediti iznose na taj datum tako da ćemo im uvećati nominalne iznose za iznos pripadnih kamata, dok ćemo mjenici koja dospijeva nakon tog datuma umanjiti iznos za iznos pripadnih kamata. Najprije ćemo odrediti broj dana za svaku od mjenica:

d_1 = 6. 6. – 9. 7. = 33 dana
d_2 = 7. 7. – 9. 7. = 2 dana
d_3 = 9. 7. – 8. 8. = 30 dana

Nastavljamo s određivanjem nominalnog iznosa nove mjenice koristeći načelo ekvivalencije:

$$X = 6.000{,}00 + \frac{6.000{,}00 \cdot 10 \cdot 33}{36.500} + 7.000{,}00 + \frac{7.000{,}00 \cdot 10 \cdot 2}{36.500} + 8.000{,}00 - \frac{8.000{,}00 \cdot 10 \cdot 30}{36.500}$$

X = 20.992,33 kn.

Anticipativni obračun kamata

Anticipativni obračun kamata je obračun kamata *na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja*. Kako smo već prije naglasili, pri obračunu jednostavnih kamata glavnica ostaje nepromijenjena, tj. kamate se ne pribrajaju glavnici. Možemo reći da se kamate obračunavaju unaprijed, i to od konačne vrijednosti nekog iznosa. To znači da će netko tko je na početku razdoblja posudio neki iznos, kamate za raspolaganje tim iznosom platiti odmah, a iznos koji je posudio vratit će na kraju razdoblja ukamaćivanja.
Uvest ćemo oznake koje su najčešće u literaturi: anticipativni godišnji kamatnjak q(G), jednostavne kamate $\overline{K}$, dok će oznake za glavnicu, konačnu vrijednost glavnice i vrijeme ostati iste kao u slučaju dekurzivnog obračuna kamata.
Pokazat ćemo kako se u slučaju anticipativnog obračuna kamata određuju jednostavne kamate za n godina od glavnice C_n, uz godišnji anticipativni kamatnjak *q(G)*:

Na početku prve godine obračunavaju se kamate za jednu godinu:

$$\overline{K} = \frac{C_n \cdot q(G)}{100}.$$

Kamate za dvije godine dvostruke su u odnosu na kamate za jednu godinu:

$$\overline{K} = 2 \cdot \frac{C_n \cdot q(G)}{100}.$$

Zaključujemo da su kamate za *n* godina n-terostruko veće u odnosu na kamate za jednu godinu:

$$\boxed{\overline{K} = n \cdot \frac{C_n \cdot q(G)}{100}}.$$

Prethodni se izraz dijeljenjem sa *n·q(G)* svodi na:

$$\boxed{\frac{\overline{K}}{n \cdot q(G)} = \frac{C_n}{100}}$$ ili u obliku omjera $$\boxed{C_n : 100 = \overline{K} : (q(G) \cdot n)}.$$

Taj se omjer naziva *temeljni omjer za jednostavni kamatni račun od sto uz anticipativni obračun kamata.*

Kako se radi o anticipativnom obračunu kamata, od glavnice s kraja razdoblja oduzimaju se kamate i dobije se glavnica s početka tog razdoblja:

$$C_n - \overline{K} = C$$

U gornjem izrazu kamate ćemo izraziti preko glavnice s kraja razdoblja i tako dobiti vezu između glavnice s početka i glavnice s kraja razdoblja:

$$C_n - \frac{C_n \cdot q(G) \cdot n}{100} = C$$

$$C_n (1 - \frac{q(G) \cdot n}{100}) = C$$

$$C_n (\frac{100 - q(G) \cdot n}{100}) = C$$

$$\boxed{C_n = C \cdot \frac{100}{100 - q(G) \cdot n}}.$$

Gornji izraz se odnosi na *konačnu ili buduću vrijednost glavnice uz jednostavni, anticipativni i godišnji obračun kamata.* Da bi se izraz mogao koristiti njegov nazivnik mora biti pozitivan i različit od nule pa se postavlja ograničenje: $q(G) \cdot n < 100$.

Primjer:

Odredite kolika je bila glavnica prije 4 godine, ako je njezina sadašnja vrijednost 12.000,00 kn, a godišnji anticipativni kamatnjak q(G) = 4. Obračun kamata je jednostavan.

Rješenje:

$C_n =$ 12.000,00 kn
q(G) = 4
n = 4 g

C = ?

$$C = C_n\left(\frac{100 - q(G)\cdot n}{100}\right)$$

$$C = 12.000{,}00\left(\frac{100 - 4\cdot 4}{100}\right) = 12.000{,}00\,\frac{84}{100} = 10.080{,}00 \text{ kn}$$

Glavnica je iznosila 10.080,00 kn. Želimo li provjeriti rješenje, odredimo iznos pripadnih jednostavnih kamata:

$$\overline{K} = n\cdot\frac{C_n \cdot q(G)}{100} = 4\cdot\frac{12.000{,}00\cdot 4}{100} = 1.920{,}00 \text{ kn.}$$

Provjera: $C = C_n - \overline{K}$ = 12.000,00 – 1.920,00 = 10.080,00 kn.

U nastavku ćemo prikazati primjenu anticipativnog obračuna kamata na primjeru potrošačkog kredita.

Potrošački kredit je specijalan način prodaje pri kojem kreditor odobrava korisniku neki iznos novca za kupnju određene vrste robe ili usluge, a korisnik kredita se obavezuje da će otplatiti ustupljeni novčani iznos, zajedno s pripadajućim kamatama, u dogovorenom vremenskom roku, jednakim ratama. Kreditor i korisnik kredita zaključuju ugovor u kojem se nalaze sljedeći podaci: (Relić, 2002;111)

a) vrsta robe ili usluge
b) iznos odobrenog potrošačkog kredita C
c) udjel u gotovini P
d) iznos godišnjeg anticipativnog kamatnjaka q(G)
e) iznos ukupnih kamata $\overline{K}$
f) ukupno dugovanje dužnika C_2
g) iznos konstantne mjesečne rate R
h) način vraćanja kredita

Kako se određuju pojedini elementi iz potrošačkog ugovora? Budući se u potrošačkom ugovoru određuje udio u gotovini koji korisnik kredita odmah plaća, najprije se od iznosa odobrenog potrošačkog kredita odredi taj dio kao postotni dio odobrenog kredita. Od odobrenog kredita C zatim se oduzme iznos udjela u gotovini P i dobije se stvarni iznos kredita C_1. Od stvarnog iznosa kredita izračunaju se kamate $\overline{K}$ i pribrajaju stvarnom iznosu kredita kako bismo dobili ukupno dugovanje C_2. Ukupno dugovanje podijelimo s brojem mjeseci na koji je odobren potrošački kredit i dobijemo iznos mjesečne rate R. Navedene korake opisat ćemo računski:

1) $P = \dfrac{C \cdot p}{100}$

2) $C - P = C_1$

3) $\overline{K} = \dfrac{C_1 \cdot k}{100}$ gdje je k kamatni koeficijent

4) $C_2 = C_1 + \overline{K}$

5) $R = \dfrac{C_2}{m}$

Da bismo došli do konačnog izraza koji povezuje navedene elemente, krećemo od izraza za ukupno dugovanje čiji je iznos jednak umnošku iznosa mjesečne rate i broja mjeseci:

$$C_2 = C_1 + \overline{K} = (C - P) + \overline{K} = C - (\overbrace{\frac{C \cdot p}{100}}^{P}) + (\overbrace{\frac{C_1 \cdot k}{100}}^{\overline{K}}) = C - \frac{C \cdot p}{100} + \frac{\overbrace{(C - \frac{C \cdot p}{100})}^{C_1} \cdot k}{100}$$

$$C - \frac{C \cdot p}{100} + \frac{(C - \frac{C \cdot p}{100}) \cdot k}{100} = R \cdot m$$

$$(C - \frac{C \cdot p}{100})(1 + \frac{k}{100}) = R \cdot m$$

$$\boxed{C(1 - \frac{p}{100})(1 + \frac{k}{100}) = R \cdot m}$$

Za potrošački kredit uz anticipativni obračun kamata jednostavne kamate se obračunavaju početkom mjeseca tijekom razdoblja otplate kredita na ostatak dugovanja O_i. Dakle:

za 1. mjesec kamate iznose $\overline{K}_1 = \dfrac{O_1 \cdot q(G) \cdot 1}{1.200} = \dfrac{C_1 \cdot q(G)}{1.200}$

za 2. mjesec kamate iznose

$$\overline{K}_2 = \frac{O_2 \cdot q(G) \cdot 1}{1.200} = \frac{(C_1 - \frac{C_1}{m}) \cdot q(G)}{1.200} = \frac{C_1(1 - \frac{1}{m}) \cdot q(G)}{1.200} = \frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} \cdot (1 - \frac{1}{m})$$

za 3. mjesec kamate iznose

$$\overline{K}_3 = \frac{O_3 \cdot q(G) \cdot 1}{1.200} = \frac{(C_1 - 2\frac{C_1}{m}) \cdot q(G)}{1.200} = \frac{C_1(1-\frac{2}{m}) \cdot q(G)}{1.200} = \frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} \cdot (1-\frac{2}{m})$$

za m-ti mjesec kamate iznose

$$\overline{K}_m = \frac{O_m \cdot q(G) \cdot 1}{1.200} = \frac{(C_1 - (m-1)\frac{C_1}{m}) \cdot q(G)}{1.200} = \frac{C_1(1-\frac{m-1}{m}) \cdot q(G)}{1.200}$$

$$\boxed{\overline{K}_m = \frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} \cdot (\frac{m-m+1}{m}) = \frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} \cdot \frac{1}{m}}.$$

Budući da su ukupne jednostavne kamate jednake zbroju kamata za svaki mjesec, možemo pisati:

$$\overline{K} = \frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} + \frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} \cdot (1-\frac{1}{m}) + \frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} \cdot (1-\frac{2}{m}) + \ldots + \frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} \cdot \frac{1}{m}.$$

Primjećujemo da je desna strana gornjeg izraza zbroj m članova aritmetičkog niza. Da bismo odredili ukupne jednostavne kamate koristit ćemo *izraz za zbroj m članova aritmetičkog niza:*

$$\boxed{S_m = \frac{m}{2}(a_1 + a_m)}$$

gdje je a_1 prvi član aritmetičkog niza, a_m zadnji član aritmetičkog niza. Prvi član aritmetičkog niza je $\frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200}$, a zadnji njegov član jednak je $\frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} \cdot \frac{1}{m}$. Dakle, ukupne jednostavne kamate su jednake:

$$\overline{K} = \frac{m}{2}(\frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} + \frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} \cdot \frac{1}{m})$$

$$\overline{K} = \frac{m}{2}(\frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} + \frac{C_1 \cdot q(G)}{1.200} \cdot \frac{1}{m}) = \frac{m \cdot C_1 \cdot q(G)}{2.400} + \frac{C_1 \cdot q(G)}{2.400} = \frac{C_1 \cdot q(G)}{2.400}(m+1)$$

konačno:

$$\boxed{\overline{K} = \frac{C_1 \cdot q(G)}{2.400}(m+1)}$$

Za $C_1 = 100$ iznos ukupnih kamata iznosi: $\overline{K} = \frac{100 \cdot q(G)}{2.400}(m+1) = \frac{q(G)}{24}(m+1) = k$,

gdje je *k kamatni koeficijent* čije je značenje:

Kamatni koeficijent predstavlja iznos ukupnih jednostavnih kamata na potrošački kredit od 100 novčanih jedinica za razdoblje od m mjeseci i anticipativni godišnji kamatnjak q(G) i jednak je:

$$\boxed{k = \frac{q(G)}{24}(m+1)}.$$

Primjer:

Trgovačko poduzeće odobrilo je potrošački kredit u iznosu od 15.000,00 kn za kupovinu bijele tehnike uz sljedeće uvjete:

a) udjel u gotovini iznosi 15 %
b) kredit je odobren na godinu dana
c) primjenjuje se godišnji anticipativni kamatnjak 8.

Izračunajte mjesečne rate potrošačkog kredita.

Rješenje:

C = 15.000,00 kn
p = 15
q(G) = 8
m = 12

R = ?

$k = \frac{q(G)}{24}(m+1) = \frac{8 \cdot (12+1)}{24} \approx 4{,}33333$. Iznos mjesečne rate izrazit ćemo pomoću izraza koji povezuje sve elemente potrošačkog kredita:

$$\boxed{C(1-\frac{p}{100})(1+\frac{k}{100}) = R \cdot m}$$

$$R = \frac{C(1-\frac{p}{100})(1+\frac{1}{100})}{m} = \frac{15.000{,}00(1-\frac{15}{100})(1+\frac{4{,}33333}{100})}{12} = 1.108{,}54 \text{ kn.}$$

Mjesečna rata potrošačkog iznosi 1.108,54 kn. Zbog praktičnosti obračuna za mjesečnu ratu uzima se samo cjelobrojni dio iznosa 1.108,00, a decimalni dio mjesečne rate 0,54 pomnoži se s brojem mjeseci i tako dobiveni iznos pribroji se prvoj ili zadnjoj mjesečnoj rati. To znači da će se potrošački kredit otplaćivati mjesečno u iznosu od 1.108,00 kn, a prva ili zadnja mjesečna rata će iznositi 1.108,00 + 12 · 0,54 = 1.114,48 kn.

Primjer:

Obitelj razmišlja o uzimanju potrošačkog kredita za namještaj, ali ne može odlučiti u kolikom iznosu. Računajući troškove života, zaključili su da bi mogli mjesečno tijekom godine dana otplaćivati iznos do visine od 900,00 kn. Izračunajte iznos kredita koji bi obitelj mogla zatražiti. Uvjeti su:

a) udjel u gotovini iznosi 20 %
b) kredit je odobren na godinu dana
c) primjenjuje se godišnji anticipativni kamatnjak 10.

Rješenje:

p = 20
q(G) = 10
m = 12
R = 900,00

C = ?

Krećemo od izraza $C(1-\frac{p}{100})(1+\frac{k}{100})=R\cdot m$. Najprije odredimo iznos kamatnog koeficijenta: $k=\frac{q(G)}{24}(m+1)=\frac{10\cdot(12+1)}{24}\approx 5{,}41666$. Nastavljamo s određivanjem iznosa kredita:

$$C=\frac{R\cdot m}{(1-\frac{p}{100})(1+\frac{k}{100})}=\frac{900\cdot 12}{(1-\frac{20}{100})(1+\frac{5{,}41666}{100})}=12.806{,}33\,\text{kn.}$$

Obitelj bi mogla zatražiti kredit za namještaj u iznosu od 12.806,33 kn.

4.2 Složeni kamatni račun s primjenom

Složeni kamatni račun primjenjuje se kod kapitalizacije dulje od godine dana, a kamate se obračunavaju od glavnice i zatim se toj glavnici pribrajaju. Radi se o ukamaćivanju pri kojem se glavnica na kraju razdoblja uvećava za iznos kamata pa se zapravo kamate u sljedećem obračunavaju i na glavnicu i na kamate. Obračun kamata može biti dekurzivan ili anticipativan.

Dekurzivni obračun kamata

Dekurzivnim načinom obračunavamo kamate tako da *na kraju razdoblja* ukamaćivanja izračunamo kamate na glavnicu *s početka tog razdoblja*. Za razliku od jednostavnog obračuna kamata kada se kamate nakon toga *ne pribrajaju glavnici* (tj.

glavnica ostaje *nepromijenjena*), kod složenog kamatnog računa kamate se nakon toga *pribrajaju glavnici,* tj. glavnica je promjenjiva.

a) Konačna ili buduća vrijednost glavnice

Odredimo konačnu ili buduću vrijednost glavnice ukamaćene na *n* godina, uz stalni kamatnjak te složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata.

Budući da se radi o složenom ukamaćivanju uvest ćemo novu oznaku za iznos kamata. Naime sa K smo označili iznos jednostavnih kamata pa ćemo sa I označiti iznos složenih kamata. Ostale oznake ostat će iste kao i kod jednostavnog i dekurzivnog obračuna kamata. Konačna vrijednost glavnice C_n:

na kraju 1. godine jednaka je početnom iznosu glavnice C_0 uvećanom za iznos godišnjih kamata:

$$C_1 = C_0 + \frac{C_0 \cdot p}{100} = C_0(1+\frac{p}{100})$$

na kraju 2. godine jednaka je iznosu glavnice na kraju prve C_1 godine uvećanom za iznos kamata:

$$C_2 = C_1 + \frac{C_1 \cdot p}{100} = C_1(1+\frac{p}{100}) = \overbrace{C_0(1+\frac{p}{100})}^{C_1}(1+\frac{p}{100}) = C_0(1+\frac{p}{100})^2$$

na kraju 3. godine jednaka je iznosu glavnice na kraju druge godine C_2 uvećanom za godišnji iznos kamata:

$$C_3 = C_2 + \frac{C_2 \cdot p}{100} = C_2(1+\frac{p}{100}) = \overbrace{C_0(1+\frac{p}{100})^2}^{C_2}(1+\frac{p}{100}) = C_0(1+\frac{p}{100})^3$$

Da bismo odredili izraz za konačnu vrijednost glavnice na kraju n-te godine primijetimo da konačne vrijednosti glavnice na kraju svake godine čine geometrijski niz (niz koji obilježava stalan omjer između dva susjedna člana) kojemu je prvi član $a_1 = C_0(1+\frac{p}{100})$, a omjer q je jednak $1+\frac{p}{100}$. Koristeći izraz za opći član geometrijskog niza $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, možemo izraziti C_n na sljedeći način:

$$C_n = \overbrace{C_0(1+\frac{p}{100})}^{a_1}\overbrace{(1+\frac{p}{100})}^{q}{}^{n-1} = C_0(1+\frac{p}{100})^n$$

Konačna vrijednost glavnice na kraju n-te godine C_n uz složen, godišnji i dekurzivan obračun kamata jednaka je:

$$\boxed{C_n = C_0 (1 + \frac{p}{100})^n}$$

Ako $1 + \frac{p}{100}$ zamijenimo sa *r*, gornji se izraz može zapisati:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot r^n}$$

gdje je *r dekurzivni kamatni faktor* čija je vrijednost jednaka *vrijednosti novčane jedinice zajedno s kamatama na kraju razdoblja ukamaćivanja.*

Iz gornjeg izraza slijede izrazi za dekurzivni kamatni faktor r te izraz za broj razdoblja, odnosno vrijeme ukamaćivanja *n* :

$$\boxed{r = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}}} \qquad \boxed{n = \frac{\log \frac{C_n}{C_0}}{\log r}}.$$

Za $C_0 = 1$ vrijedi jednakost $C_n = r^n$, gdje r^n predstavlja *faktor akumulacije*, čija je vrijednost jednaka vrijednosti novčane jedinice sa složenim kamatama na kraju n te godine uz dekurzivni obračun kamata. Da bi se dobilo na jednostavnosti izračuna konačne vrijednosti glavnice izračunate su neke vrijednosti od r^n koje se nalaze u prvim financijskim tablicama „*n p*“, gdje je *n* broj razdoblja, a *p* kamatnjak. Sada se konačna vrijednost glavnice može odrediti i uz pomoć sljedećeg izraza:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot I_p^n}.$$

Primjer:

Neki je ulog uložen u banku uz složen, dekurzivni i godišnji obračun kamata. Koliko će vremena proteći dok se taj ulog utrostruči ako je godišnji kamatnjak 8?

Rješenje:

p(G) = 8
$C_n = 3 \cdot C_0$

---

n = ?

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$$

$$n=\frac{\log\frac{C_n}{C_0}}{\log r}=\frac{\log\frac{3C_0}{C_0}}{\log 1{,}08}=\frac{\log 3}{0{,}0334237555}=\frac{0{,}4771212547}{0{,}0334237555}=14{,}2749$$

Broj godina mogli smo odrediti i primjenom linearne interpolacije (vidjeti Relić, 2002;str.123).

Primjer:

Kapital iznosi 30.000,00 kn, a kamatnjak p = 15. Na koliku će vrijednost narasti kapital za 5 godina uz složeno, dekurzivno i godišnje ukamaćivanje i koliko će iznositi kamate?

Rješenje:

$C_0 = 30.000{,}00$
P = 15
n = 5

$C_5 = ?$

$$r=1+\frac{p}{100}=1+\frac{15}{100}=1{,}15$$

$$C_n = C_0 r^n \Rightarrow C_5 = C_0 r^5 = 30.000{,}00\cdot 1{,}15^5 = 60.340{,}72$$

$$I = C_n - C_0 = 60.340{,}72 - 30.000{,}00 = 30.340{,}72$$

Kapital će narasti na vrijednost od 60.340,72 kn, dok će kamate iznositi 30.340,72 kn.

Primjer:

Koliko je iznosila kvartalna kamatna stopa uz koju je neka glavnica za p godina i složen i dekurzivni obračun utrostručila svoju vrijednost?

Rješenje:

$C_n = 3C_0$
$n = 5\cdot 4$

---

p = ?

Odredit ćemo dekurzivni kamatni faktor *r*:

$$r=\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}}=\sqrt[20]{\frac{3C_0}{C_0}}=\sqrt[20]{3}=1{,}056467\,.$$

Sada možemo odrediti traženu kamatnu stopu *p*:

$$r = 1 + \frac{p}{100} \Rightarrow p = 100r - 100 = 105{,}6467 - 100 = 5{,}6467 .$$

Primjer:

Obitelj kupuje stan i razmatra dvije ponude:

a) uplatiti 120.000,00 kn odmah, 200.000,00 kn nakon 3 godine i 300.000,00 kn nakon 6 godina;

b) uplatiti 80.000,00 kn odmah, 180.000,00 kn nakon 4 godine i 350.000,00 kn nakon 5 godina.

Koju će ponudu za kupnju stana odabrati ako se po prvoj ponudi ukamaćuje s kamatnjakom p = 8, a u drugoj s kamatnjakom p = 6 ?

Rješenje:

Izračunat ćemo sadašnje vrijednosti svih uplata za obje ponude kako bismo mogli odlučiti koja je povoljnija:

a) $C_0 = 120.000{,}00$
$C_3 = 200.000{,}00$
$C_6 = 300.000{,}00$
p=8

$C_0 = 120.000{,}00$ (uplaćuje se odmah)

$$C_0 = \frac{C_3}{r^3} = \frac{200.000{,}00}{1{,}08^3} = 158.766{,}45$$

$$C_0 = \frac{C_6}{r^6} = \frac{300.000{,}00}{1{,}08^6} = 189.050{,}89$$

Zbroj svih sadašnjih vrijednosti uplata iznosi 467.817,34 kn.

b) $C_0 = 80.000{,}00$
$C_4 = 180.000{,}00$
$C_5 = 350.000{,}00$
p = 6

$C_0 = 80.000{,}00$ (uplaćuje se odmah)

$$C_0 = \frac{C_4}{r^4} = \frac{180.000,00}{1,06^4} = 142.576,86$$

$$C_0 = \frac{C_5}{r^5} = \frac{350.000,00}{1,06^5} = 261.540,36$$

Zbroj svih sadašnjih vrijednosti uplata iznosi 484.117,22 kn.

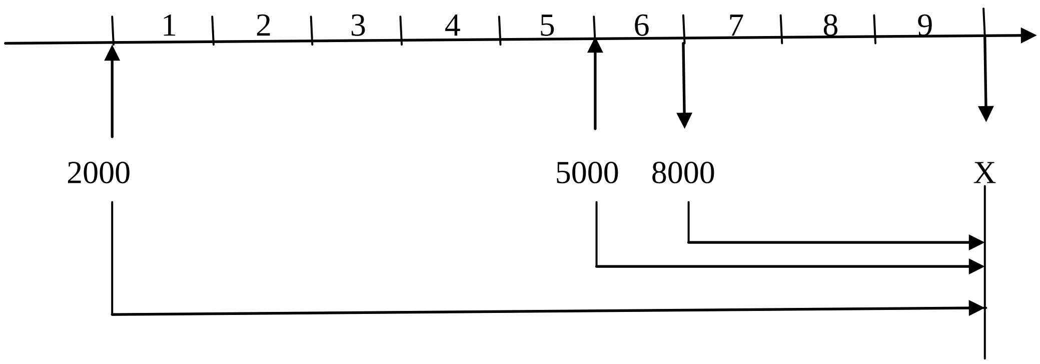
Obitelj će izabrati prvu ponudu jer je sadašnja vrijednost svih uplata po toj ponudi manja od svih uplata po drugoj ponudi, i to za 16.299,88 kn.

Primjer:

S kolikim ćemo iznosom na računu u banci raspolagati za 9 godina ako danas uložimo 2.000,00 kn, za 5 godina uložimo 5.000,00, a za 6 godina (od danas) planiramo podići 8.000,00 s računa? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivni uz kamatnjak 6%.

Rješenje:

Kako bismo lakše riješili zadatak poslužit ćemo se grafičkim prikazom promjena tijekom vremena:



Da bismo odredili traženi iznos najprije ćemo odrediti dekurzivni kamatni faktor *r*, a zatim koristiti načelo ekvivalencije kapitala:

$$r = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$$

$$x = 2000 \cdot 1,06^9 + 5000 \cdot 1,06^4 - 8000 \cdot 1,06^3$$
$$x = 163,21\,\text{kn}$$

<u>Promjenjivi dekurzivni kamatnjak</u>

Pretpostavka da je dekurzivni godišnji kamatnjak stalan nije potpuno realna, tj. za očekivati je da će dekurzivni godišnji kamatnjak mijenjati svoje vrijednosti tijekom godina. Ako zadani godišnji kamatnjak mijenja vrijednosti tijekom vremena, radi se o promjenjivom kamatnjaku p_i. Odredimo konačnu vrijednost glavnice u tom slučaju.

Na kraju prve godine konačna vrijednost glavnice je:

$$C_1 = C_0 + \frac{C_0 \cdot p_1(G)}{100} = C_0(1 + \frac{p_1(G)}{100}).$$

Na kraju druge godine konačna vrijednost glavnice je:

$$C_2 = C_1 + \frac{C_1 \cdot p_2(G)}{100} = C_1(1 + \frac{p_2(G)}{100}) = \overbrace{C_o(1 + \frac{p_1(G)}{100})}^{C_1}(1 + \frac{p_2(G)}{100}).$$

$\vdots$

Na kraju n-te godine konačna vrijednost glavnice je:

$$C_n = C_{n-1} + \frac{C_{n-1} \cdot p_n(G)}{100} = C_{n-1}(1 + \frac{p_n(G)}{100}) = C_0(1 + \frac{p_1(G)}{100})(1 + \frac{p_2(G)}{100})\ldots(1 + \frac{p_n(G)}{100}).$$

Gornji se izraz može kraće zapisati:

$$C_n = C_0 \prod_{i=1}^{n}(1 + \frac{p_i(G)}{100}) \quad \text{ili} \quad \boxed{C_n = C_0 \prod_{i=1}^{n} r_i}$$

gdje je $\boxed{r_i = 1 + \frac{p_i(G)}{100}}$ promjenjivi dekurzivni kamatni faktor.

Primjer:

Netko je uložio u banku iznos od 18.000,00 kn. Prve godine se primjenjuje godišnji kamatnjak 5, druge godine 6, a treće godine ukamaćivanje se vrši uz godišnji kamatnjak 7. Odredite konačnu vrijednost glavnice na kraju treće godine te prosječni kamatnjak.

Rješenje:

$C_0 = 18.000{,}00\,\text{kn}$

$p_1(G) = 5$

$p_2(G) = 6$

$p_3(G) = 7$

n = 3

$C_3 = ?$

$$r_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05 \qquad r_2 = 1 + \frac{p_2}{100} = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$$

$$r_3 = 1 + \frac{p_3}{100} = 1 + \frac{7}{100} = 1{,}07$$

$$\boxed{C_n = C_0 \prod_{i=1}^{n} r_i}$$

$$C_3 = C_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 18.000{,}00 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}07 = 21.436{,}38 \text{ kn.}$$

Prosječni kamatnjak p odredit ćemo preko odgovarajućeg dekurzivnog kamatnog faktora r :

$$r = \sqrt[m]{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m} = \sqrt[3]{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} = \sqrt[3]{1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}07} = 1{,}059968553$$

p = 100(r - 1) = 100(1,059968553 – 1) = 5,99 %.

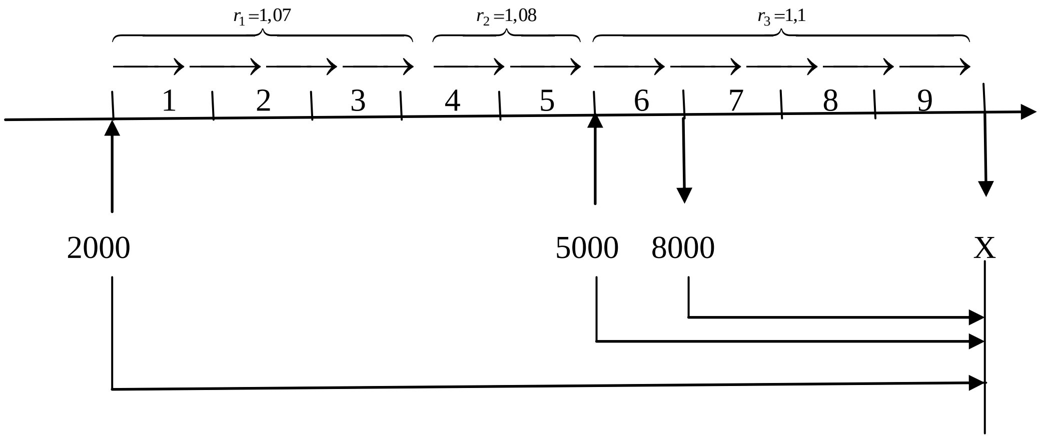
Primjer:

Koliki iznos možemo očekivati na računu u banci za 10 godina ako danas uložimo 2.000,00 kn, za 5 godina 5.000,00, a za 6 godina (od danas) podignemo 8.000,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivni, a godišnji kamatnjak prve 3 godine iznosi 7, u sljedeće 2 godine 8, a nakon toga kamatnjak iznosi 10. Koristite se grafičkim prikazom!

Rješenje:

Najprije ćemo odrediti odgovarajuće dekurzivne kamatne faktore:

$$r_1 = 1 + \frac{7}{100} = 1{,}07 \qquad r_2 = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08 \qquad r_3 = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$$



Traženi iznos odredit ćemo sada kako slijedi:

$x = 2000 \cdot 1{,}07^3 \cdot 1{,}08^2 \cdot 1{,}1^4 + 5000 \cdot 1{,}1^4 - 8000 \cdot 1{,}1^3$

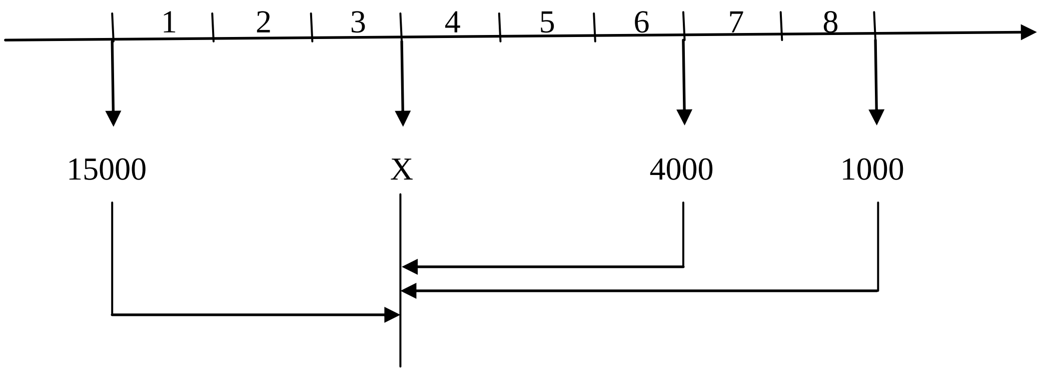
$x = 856{,}58$ kn.

Primjer:

Petar je dogovorio vraćanje dugovanja u iznosu od 15.000,00 kn u 4 rate. Kolika je prva rata koju Petar mora uplatiti nakon 3 godine ako druga rata iznosi 4.000,00 kn i plaća se nakon 6 godina, a treća rata iznosi 1.000,00 kn i plaća se nakon 8 godina? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivni uz kamatnjak 4.

Rješenje:

Grafički prikaz problema:



r = 1,04

$$x = 15000 \cdot 1{,}04^3 - \frac{4000}{1{,}04^3} - \frac{1000}{1{,}04^5} = 12.495{,}05 \text{ kn}$$

Nakon 3 godine Petar mora uplatiti 12.495,05 kn.

b)Početna ili sadašnja vrijednost glavnice

Ako želimo znati kolika je bila vrijednost neke glavnice koja je nakon *n* godina, uz složeno, godišnje i dekurzivno ukamaćivanje te fiksan kamatnjak dostigla vrijednost C_n, krenut ćemo od izraza za konačnu vrijednost glavnice uz složeno, godišnje i dekurzivno ukamaćivanje:

$C_n = C_0 \cdot r^n$ iz čega slijedi: $\boxed{C_0 = \frac{C_n}{r^n}}$.

Ako u zadnji izraz uvedemo zamjenu $v = \frac{1}{r}$, dobit ćemo izraz za početnu ili sadašnju vrijednost glavnice:

$$\boxed{C_0 = C_n \cdot v^n}$$

V je diskontni kamatni faktor i predstavlja vrijednost koju treba uložiti u banku na početku godine da bi se zajedno sa složenim dekurzivnim kamatama na kraju godine *uz kamatnjak p moglo podići novčanu jedinicu.* Ako je konačna vrijednost jednaka jedinici, tj. $C_n = 1$, tada je sadašnja vrijednost glavnice:

$$C_0 = v^n.$$

Zbog potrebe prakse izračunate su vrijednosti od v^n i zapisane u „drugim financijskim tablicama *np*" gdje je *n* broj razdoblja, a *p* dekurzivni godišnji kamatnjak.

Kad dekurzivni kamatnjak mijenja svoje vrijednosti tijekom razdoblja ukamaćivanja izraz za sadašnju vrijednost glavnice poprima sljedeći oblik:

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{\prod_{i=1}^{n} r_i}}.$$

Primjer:

Ulagač razmišlja o tome da danas u banku uloži neki novčani iznos kako bi nakon 8 godina imao pravo podići i investirati u posao 100.000,00 kn. Banka obračunava složene kamate godišnje i dekurzivno. Kamatnjak u prve dvije godine iznosi 6, u sljedeće tri godine 7, a u zadnje tri godine 8. O kolikom se novčanom iznosu radi?

Rješenje:

$C_8 = 100.000{,}00$

$p_1 = p_2 = 6$; $p_3 = p_4 = p_5 = 7$; $p_6 = p_7 = p_8 = 8$

$C_0 = ?$

$r_1 = r_2 = 1{,}06$ $\quad$ $r_3 = r_4 = r_5 = 1{,}07$ $\quad$ $r_6 = r_7 = r_8 = 1{,}08$

$$C_0 = \frac{C_n}{\prod_{i=1}^{n} r_i} = \frac{100.000{,}00}{1{,}06^2 \cdot 1{,}07^3 \cdot 1{,}08^3} = 57.672{,}09 \text{ kn}.$$

<u>Kamatnjaci (kamatne stope)</u>

Kamata se najčešće propisuje za vrijeme od godine dana. Ukoliko je i ukamaćivanje godišnje, nije potrebno preračunavati *propisani ili nominalni kamatnjak* na vremenske intervale ukamaćivanja. Međutim, ukoliko se ukamaćivanje vrši češće od jedanput godišnje, npr. mjesečno, kvartalno ili polugodišnje, a nominalni kamatnjak je godišnji, potrebno je preračunati nominalni kamatnjak na vremenske intervale ukamaćivanja. Kod preračunavanja na novo obračunsko razdoblje koristi se *relativni konformni kamatnjak* (kamatna stopa).

a) Relativni kamatnjak

Relativni kamatnjak $\overline{p}(d)$ dobije se tako da se nominalni kamatnjak *p(d₁)* podijeli s brojem obračunavanja kamata. Dakle, najprije se utvrđuje koliko puta se vrši ukamaćivanje i pri tome se koristi sljedeći izraz:

$$\boxed{m = \frac{d_1}{d}}$$

gdje je:

m – broj obračunavanja kamata
d_1 – duljina vremenskog intervala za koji je propisan nominalni kamatnjak
d – duljina vremenskog intervala u kojem se ukamaćuje.

Nakon toga se nominalni kamatnjak $p(d_1)$ podijeli s brojem ukamaćivanja *m* i dobije se relativni kamatnjak $\overline{p}(d)$:

$$\boxed{\overline{p}(d) = \frac{p(d_1)}{m}}.$$

Primjer:

Kolika će biti vrijednost glavnice od 25.000,00 kn na kraju pete godine ako je polugodišnji kamatnjak 3, a složene dekurzivne kamate obračunavaju se godišnje?

Rješenje:

Budući da je zadan polugodišnji kamatnjak, a vrijeme ukamaćivanja je jedna godina, potrebno je preračunati nominalni kamatnjak u relativni.

$C_0 = 25.000,00$
n = 5 godina
p(P) = 3
$d_1 = 1P$
d = 1G

$C_5 = ?$

$$m = \frac{d_1}{d} = \frac{1P}{1G} = \frac{1P}{2P} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{p}(G) = \frac{p(P)}{m} = \frac{3}{m} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$$\overline{r} = 1 + \frac{\overline{p}(G)}{100} = 1,06$$

$$\overline{C}_5 = C_0 \cdot \overline{r}^5 = 25.000,00 \cdot 1,06^5 = 33.455,64$$

Treba naglasiti da se uporabom relativnog kamatnjaka ne dobiva isti iznos kamata kao uporabom nominalnog kamatnjaka. Naime, iznos kamata dobiven primjenom nominalnog kamatnjaka je:

a) veći od iznosa kamata dobivenog uz relativni kamatnjak ukoliko je 0 < m < 1 ili
b) manji od iznosa kamata dobivenog uz relativni kamatnjak ukoliko je m > 1.

Primjer:

Na koliku će vrijednost narasti glavnica od 20.000,00 kn nakon 15 godina, ako se ukamaćuje kvartalno uz relativni kamatnjak, a godišnji kamatnjak p iznosi 12.

Rješenje:

p = 12
m = 4

$$\overline{p}(d) = \frac{p(d_1)}{m} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\overline{r} = 1 + \frac{\overline{p}(G)}{100} = 1{,}03$$

$$\overline{C}_{15\cdot 4} = C_0 \cdot r^{15\cdot 4} = 20.000{,}00 \cdot 1{,}03^{60} = 117.832{,}06$$

b) Konformni kamatnjak

Konformni kamatnjak $p'(d)$ je kamatnjak čije je obilježje da se njegovom uporabom uz *m* ukamaćivanja dobiva isti iznos kamata kao i uporabom nominalnog kamatnjaka uz jedno ukamaćivanje. Koristeći to obilježje, izvest ćemo izraz za konformni kamatnjak kako slijedi:

$$1 + \frac{p(d_1)}{100} = \left(1 + \frac{p'(d)}{100}\right)^m \Bigg|^{\frac{1}{m}}$$

$$\left(1 + \frac{p(d_1)}{100}\right)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{p'(d)}{100}$$

$$\left(1 + \frac{p(d_1)}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{p'(d)}{100}$$

$$\boxed{p'(d) = 100\left[\left(1 + \frac{p(d_1)}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]}$$

Primjer:

Ako je zadani godišnji kamatnjak od 10, koliki je dnevni, mjesečni, kvartalni i polugodišnji kamatnjak?

Rješenje:

Izračun dnevnog kamatnjaka: ako se radi o jednostavnom ukamaćivanju izračunamo relativni ispodgodišnji kamatnjak za $p(d_1)$ = 10 i m = 365.

$$\overline{p}(d) = \frac{p(d_1)}{m} = \frac{10}{365} = 0{,}027397$$

Ako je ukamaćivanje složeno, izračunamo konformni ispodgodišnji kamatnjak:

$$p'(d) = 100\left[(1+\frac{p(d_1)}{100})^{\frac{1}{m}} - 1\right] = 100\left[(1+\frac{10}{100})^{\frac{1}{365}} - 1\right] = 0{,}0261157$$

Konformni ispodgodišnji kamatnjak uvijek je manji od relativnog ispodgodišnjeg kamatnjaka.

Izračun mjesečnog kamatnjaka: ako se radi o jednostavnom ukamaćivanju, izračunamo relativni ispodgodišnji kamatnjak za $p(d_1)$ = 10 i m = 12.

$$\overline{p}(d) = \frac{p(d_1)}{m} = \frac{10}{12} = 0{,}833333$$

Ako je ukamaćivanje složeno, izračunamo konformni ispodgodišnji kamatnjak:

$$p'(d) = 100\left[(1+\frac{p(d_1)}{100})^{\frac{1}{m}} - 1\right] = 100\left[(1+\frac{10}{100})^{\frac{1}{12}} - 1\right] = 0{,}797414$$

Izračun kvartalnog kamatnjaka: ako se radi o jednostavnom ukamaćivanju, izračunamo relativni ispodgodišnji kamatnjak za $p(d_1)$ = 10 i m = 4.

$$\overline{p}(d) = \frac{p(d_1)}{m} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

Ako je ukamaćivanje složeno, izračunamo konformni ispodgodišnji kamatnjak:

$$p'(d) = 100\left[(1+\frac{p(d_1)}{100})^{\frac{1}{m}} - 1\right] = 100\left[(1+\frac{10}{100})^{\frac{1}{4}} - 1\right] = 2{,}411368$$

Izračun polugodišnjeg kamatnjaka: ako se radi o jednostavnom ukamaćivanju, izračunamo relativni ispodgodišnji kamatnjak za $p(d_1)$ = 10 i m = 2.

$$\overline{p}(d)=\frac{p(d_1)}{m}=\frac{10}{2}=5$$

Ako je ukamaćivanje složeno, izračunamo konformni ispodgodišnji kamatnjak:

$$p'(d)=100\left[(1+\frac{p(d_1)}{100})^{\frac{1}{m}}-1\right]=100\left[(1+\frac{10}{100})^{\frac{1}{2}}-1\right]=4{,}880884$$

Ako usporedimo veličine dobivenih kamatnjaka, primjećujemo da je konformni ispodgodišnji kamatnjak uvijek manji od relativnog ispodgodišnjeg kamatnjaka.

Primjer:

Na koliku vrijednost naraste glavnica od 40.000,00 kn nakon 18 mjeseci uz godišnji dekurzivni kamatnjak od 10 i složen obračun kamata. Koristite konformni kamatnjak!

Rješenje:

$C_0=40.000{,}00$

p(G) = 10

$C_{18}=?$

$$p'(m)=100\left[(1+\frac{p(d_1)}{100})^{\frac{1}{m}}-1\right]=100\left[(1+\frac{10}{100})^{\frac{1}{12}}-1\right]=0{,}797$$

$$r'=1+\frac{p'(m)}{100}=1{,}00797414$$

$$C'_{18}=40.000{,}00\cdot r'^{18}=40.000{,}00\cdot 1{,}00797414^{18}=46.147{,}59$$

Primjer:

Zadane su vrijednosti dekurzivnih godišnjih kamatnjaka p_1 i p_2. Odredite ekvivalentne konformne kamatnjake za siječanj i travanj.

$p_1 = 20$

$p_2 = 15$

$$p'=100\left(\sqrt[m]{1+\frac{p(d_1)}{100}}-1\right)$$

Za p_1 = 20 ekvivalentni konformni mjesečni kamatnjak za siječanj koji ima 31 dan iznosi:

$$p'_{\frac{365}{31}} = 100\left(\sqrt[\frac{365}{31}]{1+\frac{20}{100}}-1\right) = 1{,}560535599.$$

Ekvivalentni konformni mjesečni kamatnjak za travanj koji ima 30 dana iznosi:

$$p'_{\frac{365}{30}} = 100\left(\sqrt[\frac{365}{30}]{1+\frac{20}{100}}-1\right) = 1{,}50981765.$$

Za p_2 = 15 ekvivalentni konformni mjesečni kamatnjak za siječanj iznosi:

$$p'_{\frac{365}{31}} = 100\left(\sqrt[\frac{365}{31}]{1+\frac{15}{100}}-1\right) = 1{,}194092268.$$

Ekvivalentni konformni mjesečni kamatnjak za travanj iznosi:

$$p'_{\frac{365}{30}} = 100\left(\sqrt[\frac{365}{31}]{1+\frac{15}{100}}-1\right) = 1{,}155351514.$$

Primjer:

Odredite vrijednost početnog kapitala u iznosu od 15.000,00 kn ukamaćenog uz dekurzivni godišnji kamatnjak 10 nakon 120 dana (godina nije prijestupna). Primijenite:

a) relativni kamatnjak
b) konformni kamatnjak.

Rješenje:

$C_0 = 15.000{,}00$
p(G) = 10
n = 120 dana
m = 365

$C_{120} = ?$

a) Uz primjenu relativnog kamatnjaka konačna vrijednost kapitala nakon 120 dana iznosi:

$$\overline{p}(d) = \frac{p(d_1)}{m} = \frac{10}{365} = 0{,}0273972603$$

$$\bar{r} = 1 + \frac{\bar{p}}{100} = 1 + \frac{0{,}0273972603}{100} = 1{,}000273972603$$

$$\bar{C}_{120} = 15.000{,}00 \cdot 1{,}000273973^{120} = 15.501{,}28$$

b) Uz primjenu konformnog dnevnog kamatnjaka vrijednost kapitala nakon 120 dana iznosi:

$$p^{'} = 100(\sqrt[d]{1 + \frac{p}{100}} - 1) = 100(\sqrt[120]{1 + \frac{10}{100}} - 1) = 0{,}0794567$$

$$r^{'} = 1 + \frac{0{,}0794567}{100} = 1{,}000794567$$

$$C_n^{'} = C_0 \cdot r^n \Rightarrow C_{120}^{'} = 15.000{,}00 \cdot 1{,}000794567^{120} = 16.500{,}00$$

Primjer:

Izračunajte vrijednost početnog kapitala od 30.000,00 nakon 5 godina ako je ukamaćivanje godišnje, složeno i dekurzivno, a polugodišnji kamatnjak iznosi 3,5. Odredite i pripadni iznos kamata.

Rješenje:

$C_0 = 30.000{,}00$
$p(P) = 3{,}5$
m = 2
n = 5g

$C_{10} = ?$
$I_{10} = ?$

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{3{,}5}{100} = 1{,}035$$

$$C_{mn} = C_0 \cdot r^{mn}$$

$$C_{10} = C_0 \cdot r^{10} = 30.000{,}00 \cdot 1{,}035^{10} = 42.317{,}96$$

Kamate se mogu odrediti na dva načina:
1. $I_{mn} = C_0(r^{mn} - 1) = 30.000{,}00(1.035^{10} - 1) = 12.317{,}96$

2. $C_{10} - C_0 = I_{10} = 42.317{,}96 - 30.000{,}00 = 12.317{,}96$

<u>Anticipativni obračun kamata</u>

Anticipativno obračunavanje kamata podrazumijeva obračun kamata na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja. Kako se radi o složenom ukamaćivanju, glavnici se na kraju svakog razdoblja pribrajaju kamate.

a) Konačna (buduća) vrijednost glavnice

Kako odrediti konačnu vrijednost glavnice na kraju n - te godine uz složen, godišnji i anticipativni obračun kamata? Uvest ćemo sljedeće oznake:

C_0	početna vrijednost glavnice
n	broj godina
q(G)	anticipativni godišnji kamatnjak
C_n	konačna vrijednost glavnice

Da bismo odredili konačnu vrijednost glavnice uz anticipativni obračun kamata, krećemo od konačnih vrijednosti glavnica za svako razdoblje ukamaćivanja:

1. konačna vrijednost glavnice za prvu godinu:

$$C_1 - \frac{C_1 \cdot q(G)}{100} = C_0$$

$$C_1\left(1 - \frac{q(G)}{100}\right) = C_0$$

$$C_1\left(\frac{100 - q(G)}{100}\right) = C_0$$

$$C_1 = \frac{100}{100 - q(G)} C_0$$

2. konačna vrijednost glavnice za drugu godinu:

$$C_2 - \frac{C_2 \cdot q(G)}{100} = C_1$$

$$C_2\left(1 - \frac{q(G)}{100}\right) = C_1$$

$$C_2\left(\frac{100 - q(G)}{100}\right) = C_1$$

$$C_2=\frac{100}{100-q(G)}C_1=\frac{100}{100-q(G)}\overbrace{\frac{100}{100-q(G)}C_0}^{C_1}=\left(\frac{100}{100-q(G)}\right)^2C_0$$

$$C_2=\left(\frac{100}{100-q(G)}\right)^2C_0$$

3. konačna vrijednost glavnice za treću godinu:

$$C_3-\frac{C_3\cdot q(G)}{100}=C_2$$
$$C_3\left(1-\frac{q(G)}{100}\right)=C_2$$
$$C_3\left(\frac{100-q(G)}{100}\right)=C_2$$

$$C_3=\left(\frac{100}{100-q(G)}\right)C_2=\left(\frac{100}{100-q(G)}\right)\overbrace{\left(\frac{100}{100-q(G)}\right)^2C_0}^{C_2}=\left(\frac{100}{100-q(G)}\right)^3C_0$$

$$C_3=\left(\frac{100}{100-q(G)}\right)^3C_0$$

Analogijom zaključujemo da je konačna vrijednost glavnice za n – tu godinu jednaka:

$$\boxed{C_n=C_0\left(\frac{100}{100-q(G)}\right)^n}$$

Radi jednostavnosti zapisa uvodi se zamjena $\frac{100}{100-q(G)}=\rho^n$, gdje je ρ *anticipativni kamatni faktor* pa se sada gornji izraz za konačnu vrijednost glavnice može zapisati

$\boxed{C_n=C_0\rho^n}$ ili primjenom prvih financijskih tablica n, q $\boxed{C_n=C_0I_q^n}$

b) Početna (sadašnja) vrijednost glavnice

Da bismo odredili početnu (sadašnju) vrijednost glavnice koja dospijeva za n godina uz anticipativni godišnji kamatnjak i složen obračun kamata, krećemo od izraza za konačnu vrijednost glavnice:

$C_n = C_0 \rho^n$ iz čega slijedi $\boxed{C_0 = \frac{C_n}{\rho^n}}$ ili $C_0 = C_n \frac{1}{\rho^n}$.

Primjenom drugih financijskih tablica n, q u kojima su navedene neke od vrijednosti $\frac{1}{\rho^n}$, početna vrijednost glavnice određuje se uz pomoć izraza:

$$\boxed{C_0 = C_n II_q^n}.$$

Nominalni, relativni i konformni kamatnjak

Kad se vremenski intervali nominalnog kamatnjaka i ukamaćivanja ne podudaraju, potrebno je, kao i kod dekurzivnog ukamaćivanja, preračunati nominalni kamatnjak u relativni ili u konformni kamatnjak.

Relativni kamatnjak jednak je $\boxed{\bar{q}(d) = \frac{q(d_1)}{m}}$, gdje je d duljina razdoblja ukamaćivanja, d_1 je, kao i kod dekurzivnog ukamaćivanja, duljina vremenskog intervala nominalnog ili propisanog kamatnjaka.

Konformni kamatnjak $q'(d)$ određuje se iz jednakosti: $1 - \frac{q(d_1)}{100} = \left(1 - \frac{q'(d)}{100}\right)^m$ kako slijedi:

$$\left(1 - \frac{q(d_1)}{100}\right)^{\frac{1}{m}} = 1 - \frac{q'(d)}{100}$$

$$\left(1 - \frac{q(d_1)}{100}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{100 - q'(d)}{100}$$

$$100\left(1 - \frac{q(d_1)}{100}\right)^{\frac{1}{m}} = 100 - q'(d)$$

$$q'(d) = 100 - 100\left(1 - \frac{q(d_1)}{100}\right)$$

i konačno:

$$\boxed{q'(d) = 100\left[1 - \left(1 - \frac{q(d_1)}{100}\right)^{\frac{1}{m}}\right]}$$

Ekvivalenti dekurzivni (anticipativni) kamatnjak

Ukoliko je zadan anticipativni kamatnjak, možemo odrediti ekvivalentni dekurzivni kamatnjak i primijeniti dekurzivno ukamaćivanje. Isto tako moguće je postupiti obratno: za zadani dekurzivni kamatnjak možemo odrediti njegov anticipativni ekvivalent i primijeniti anticipativno ukamaćivanje. Ipak se najčešće u primjenama anticipativno ukamaćivanje svodi na dekurzivno, korištenjem ekvivalentnog dekurzivnog kamatnjaka.
Vezu između jednoga i drugog kamatnjaka možemo utvrditi tako da postavimo sljedeći uvjet[3]: početna ili sadašnja vrijednost novčane jedinice s kraja razdoblja uz primjenu anticipativnog i dekurzivnog obračuna kamata je jednaka.

Navedeni uvjet može se izraziti kao:

$$1-\frac{q(d_1)}{100}=\frac{1}{1+\frac{p(d_1)}{100}}$$, iz čega slijedi

$$1-\frac{q(d_1)}{100}=\frac{1}{\frac{100+p(d_1)}{100}}$$

$$1-\frac{100}{100+p(d_1)}=\frac{q(d_1)}{100}$$

$$\frac{100+p(d_1)-100}{100+p(d_1)}=\frac{q(d_1)}{100}$$

$$\frac{p(d_1)}{100+p(d_1)}=\frac{q(d_1)}{100}\Big|\cdot 100$$

i konačno, izraz za anticipativni kamatnjak ekvivalentan dekurzivnom kamatnjaku:

$$\boxed{q(d_1)=\frac{100\cdot p(d_1)}{100+p(d_1)}}.$$

Analogno prethodnim koracima dobije se izraz za ekvivalentni dekurzivni kamatnjak:

$$\boxed{p(d_1)=\frac{100\cdot q(d_1)}{100-q(d_1)}}.$$

Primjer:

Odredite konačnu vrijednost iznosa 2.000,00 kn na kraju desete godine ako je godišnji anticipativni kamatnjak 15, a ukamaćivanje godišnje, složeno i dekurzivno.

Rješenje:

---

[3] detalje vidjeti u Relić, 2002., str.184. i Šego, 2008. str. 93.

$C_0 = 2.000{,}00\,\text{kn}$
n = 10
q(G) = 15

$C_{10} = ?$

Odredit ćemo ekvivalentni dekurzivni kamatnjak, a nakon toga i vrijednost iznosa na kraju desete godine uz dekurzivni obračun kamata:

$$p(d_1) = \frac{100 \cdot q(d_1)}{100 - q(d_1)} = \frac{100 \cdot 15}{100 - 15} = 17{,}64705882$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n = 2.000{,}00\left(1 + \frac{17{,}64705882}{100}\right)^{10} = 10.158{,}76\,\text{kn.}$$

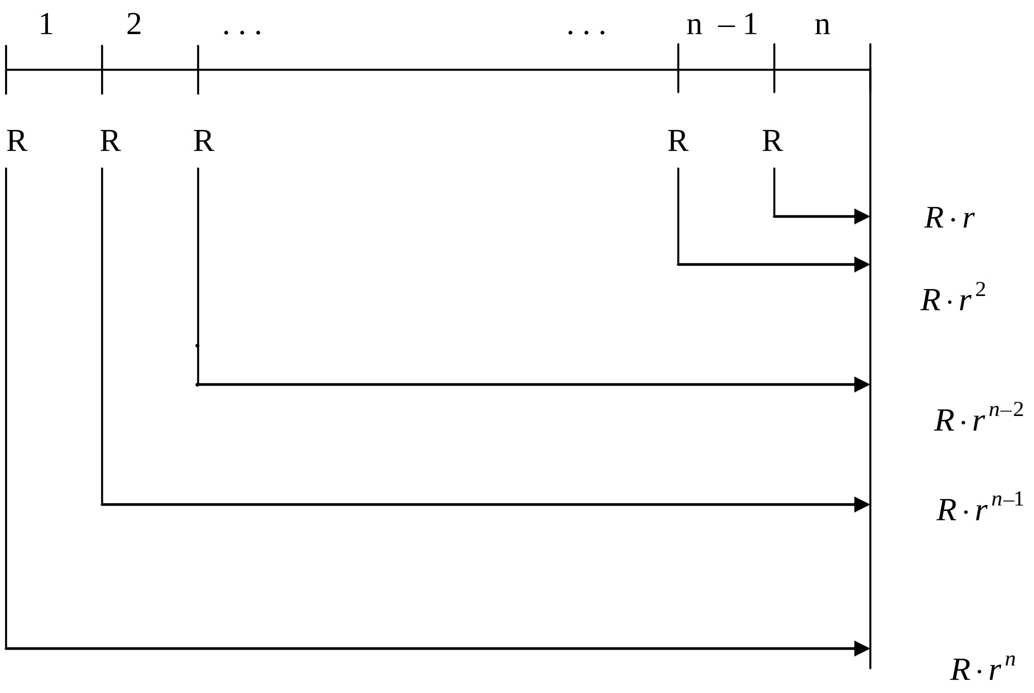
5. PERIODIČNE UPLATE I ISPLATE

U dosadašnjim smo primjerima pokazali kako odrediti konačnu ili buduću vrijednost glavnice uz zadani kamatnjak i odgovarajuće ukamaćivanje te određeno vremensko razdoblje. U praksi se međutim pojavljuju i primjeri kada se *uplate (isplate) vrše periodično u određenom vremenskom razdoblju kapitalizacije*. Glavnicu možemo smatrati jednokratnom isplatom pa ćemo u nastavku najprije prikazati kako se određuje konačna ili buduća vrijednost višekratnih jednakih uplata (isplata) početkom vremenskog razdoblja ili prenumerando, a nakon toga i krajem vremenskog razdoblja ili postnumerando.

5.1 Konačna vrijednost periodičnih uplata i isplata

a) Prenumerando uplate (isplate)

Radi jednostavnijeg razumijevanja izvođenja izraza za konačnu vrijednost godišnjih prenumerando uplata (isplata) R na kraju n-te godine uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata i godišnji kamatnjak p(G) koristit ćemo se sljedećim grafičkim prikazom:



Zbrojimo li pojedinačne konačne vrijednosti svake uplate (isplate) R, dobit ćemo njihovu ukupnu konačnu vrijednost, tj. S_n:

$$S_n = R \cdot r + R \cdot r^2 + ... + R \cdot r^{n-2} + R \cdot r^{n-1} + R \cdot r^n = R\sum_{i=1}^{n} r^i$$

Desna strana gornje jednakosti zbroj je n članova geometrijskog niza čiji je prvi član a_1 jednak Rr, a omjer između svaka dva susjedna člana q jednak je r. Koristeći izraz za zbroj n članova geometrijskog niza $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ dolazimo do konačnog izraza za S_n:

$$\boxed{S_n = R \cdot r \frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Postavimo li za R vrijednost 1 tj. pretpostavimo li da se radi o uplatama (isplatama) od po jedne novčane jedinice, njihova konačna vrijednost zajedno s kamatama bit će jednaka:

$$r \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Neke vrijednosti prethodnog izraza određene su i nalaze se u trećim financijskim tablicama n p: III_p^n, gdje je n broj razdoblja, a p kamatnjak. Sada možemo izraz za konačnu vrijednost prenumerando uplata (isplata) alternativno zapisati kao:

$\boxed{S_n = R \cdot III_p^n}$.

Primjer:

Banka građanima nudi opciju uplaćivanja određene svote početkom godine uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata. Kolik bi iznos trebalo uplaćivati da bi se steklo pravo podizanja 50.000,00 nakon 15 godina ako banka primjenjuje godišnji kamatnjak 10 ?

Rješenje:

$S_n = 50.000{,}00$ kn

n = 15 g

p(G) = 10

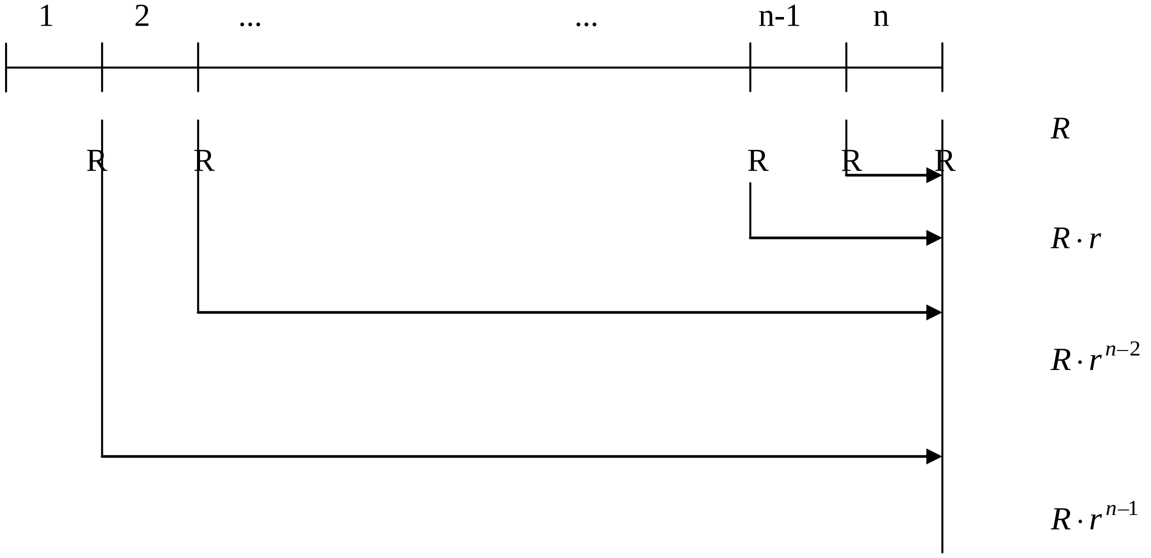
R = ?

$r = 1 + \frac{p(G)}{100} = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$

Iz $S_n = R \cdot r \frac{r^n - 1}{r - 1}$ slijedi $R = S_n \frac{r-1}{r(r^n - 1)} = 50.000{,}00 \frac{1{,}1 - 1}{1{,}1(1{,}1^{15} - 1)} = 1.430{,}63$ kn.

b) Postnumerando uplate (isplate)

Ako se uplate (isplate) R vrše na kraju godine, tada se konačna vrijednost $\hat{S}_n$ uplata (isplata) na kraju n-te godine uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata određuje (uz pomoć grafičkog prikaza) na sljedeći način:



Zbrojimo li sve konačne vrijednosti pojedinačnih uplata (isplata), dobit ćemo izraz za konačnu vrijednost $\hat{S}_n$ godišnjih postnumerando uplata (isplata) R na kraju n-te godine uz godišnji dekurzivni kamatnjak p(G) te složeno, godišnje i dekurzivno ukamaćivanje:

$$\hat{S}_n = R + R \cdot r \ + ... + R \cdot r^{n-2} + R \cdot r^{n-1} = R\sum_{i=1}^{n} r^{i-1}$$

Desna strana gornje jednakosti predstavlja niz od n članova geometrijskog niza, čiji je prvi član R, a omjer r. Koristeći izraz za zbroj prvih n članova geometrijskog niza dobijemo izraz za konačnu vrijednost godišnjih postnumerando uplata (isplata) na kraju n-te godine:

$$\boxed{\hat{S}_n = R\frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Ukoliko je R = 1, slijedi $\hat{S}_n = \frac{r^n - 1}{r - 1}$, što predstavlja konačnu vrijednost postnumerando uplata (isplata) zajedno s pripadnim kamatama na kraju n - te godine.
Usporedimo li izraze za konačne vrijednosti prenumerando i postnumerando uplata (isplata), možemo postaviti sljedeću relaciju među njima:

$$\boxed{S_n = \hat{S}_n \cdot r}.$$

Primjer:

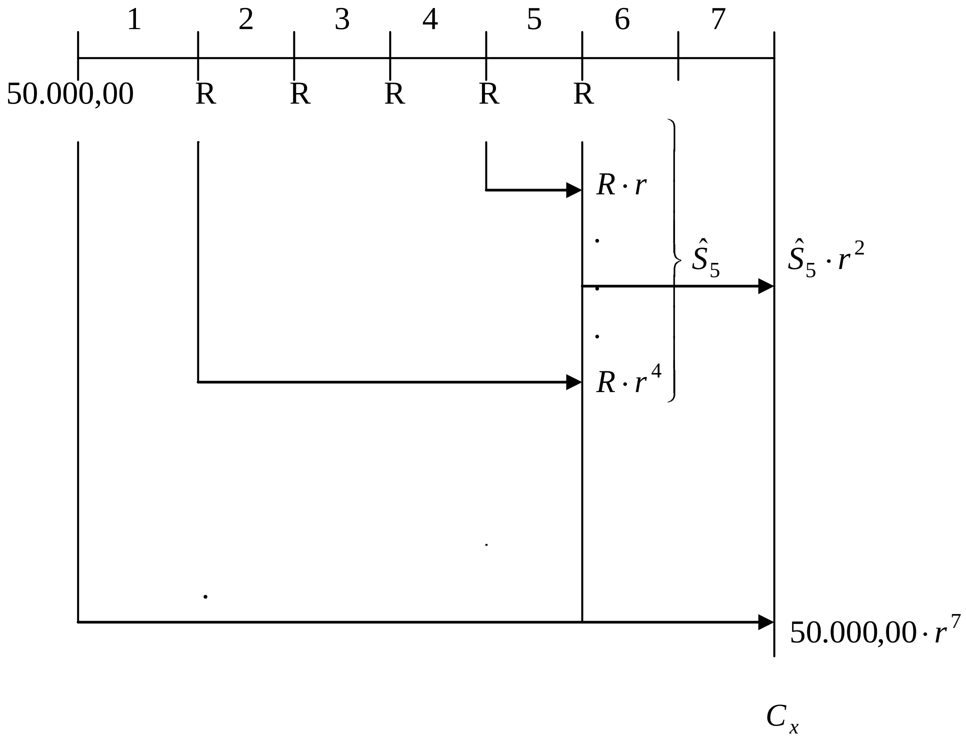
U banku je uloženo 50.000,00 kn da bi se sljedećih 5 godina moglo krajem godine podizati po 7.000,00 kn. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivni, uz godišnji kamatnjak p(G) = 12. Koliki će iznos biti na računu u banci na kraju sedme godine?

Rješenje:

$C_0 = 50.000,00$ kn
R = 7.000,00 kn
p(G) = 12

$C_x = ?$

Grafički prikaz postavke problema:



Iznos nakon sedam godina odredit ćemo kao razliku početnog iznosa od 50.000,00 ukamaćenog sedam godina i konačne vrijednosti isplata (od po 7.000,00 tijekom 5 godina) ukamaćene na razdoblje od dvije godine:

$$C_x = 50.000,00 \cdot 1{,}12^7 - 7.000,00 \frac{1{,}12^5 - 1}{1{,}12 - 1} \cdot 1{,}12^2 = 110.534{,}07 - 55.783{,}08$$

$$C_x = 54.750{,}99 \text{ kn.}$$

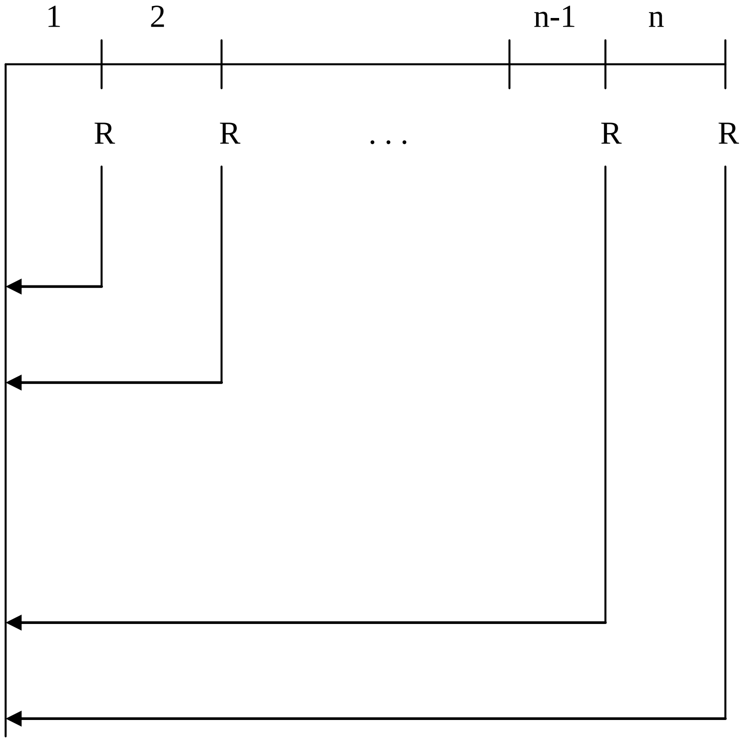
5.2 Početna (sadašnja) vrijednost prenumerando i postnumerando isplata (renti)

Da bismo razmotrili probleme određivanja sadašnjih vrijednosti prenumerando i postnumerando isplata (renti), koristit ćemo dosadašnje oznake i uvesti neke nove:

R	godišnja konstantna isplata (renta)
n	broj godina ukamaćivanja
p(G)	godišnji dekurzivni kamatnjak
A_n	početna ili sadašnja vrijednost postnumerando isplata (renti)
$\hat{A}_n$	početna ili sadašnja vrijednost prenumerando isplata (renti).

a) Postnumerando isplate (rente)

Problem je odrediti početnu ili sadašnju vrijednost konstantnih isplata (renti) koje dospijevaju krajem godine tijekom razdoblja ukamaćivanja od n godina uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata te godišnji kamatnjak p(G). Grafički prikaz opisanog problema:



$$A_n \begin{cases} R \cdot \frac{1}{r} \\ R \cdot \frac{1}{r^2} \\ . \\ . \\ . \\ R \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \\ R \cdot \frac{1}{r^n} \end{cases}$$

Zbrojimo li svaku pojedinačnu početnu (sadašnju) vrijednost isplata (renti) koje dospijevaju krajem godine, dobit ćemo izraz za početnu (sadašnju) vrijednost postnumerando isplata (renti):

$$A_n = R \cdot \frac{1}{r} + R \cdot \frac{1}{r^2} + ... + R \cdot \frac{1}{r^{n-1}} + R \cdot \frac{1}{r^n} = R \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^i}$$

Desna strana gornjeg izraza je geometrijski niz od n članova čiji je prvi član $R \cdot \frac{1}{r}$, a omjer između dvaju susjednih članova iznosi $\frac{1}{r}$. Koristeći izraz za zbroj n članova geometrijskog niza, dobijemo sljedeći izraz za početnu (sadašnju) vrijednost postnumerando isplata (renti):

$$A_n = R \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r} - 1} = R \cdot \frac{\frac{1 - r^n}{r^n}}{r \frac{1-r}{r}} = R \cdot \frac{\frac{1 - r^n}{r^n}}{1 - r} = R \cdot \frac{1 - r^n}{r^n (1 - r)} = R \cdot \frac{-(r^n - 1)}{-r^n (r - 1)} = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n (r - 1)}$$

$$\boxed{A_n = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n (r - 1)}}.$$

Iz gornjeg izraza slijedi izraz za isplate (rente) R:

$$\boxed{R = A_n \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n-1)}}.$$

Ako pretpostavimo da je vrijednost isplate (rente) jednaka novčanoj jedinici, tj. R = 1, tada gornji izraz poprima oblik:

$\boxed{A_n = \frac{r^n-1}{r^n(r-1)}}$ i ima sljedeće značenje:

to je iznos koji treba uložiti na početku razdoblja ukamaćivanja kako bi se krajem svake od n godina mogla isplaćivati jedna novčana jedinica.

Za neke vrijednosti od n i p izračunati su navedeni iznosi i nalaze se u četvrtim financijskim tablicama np, tj. IV_p^n, pa se alternativni izraz za početnu (sadašnju) vrijednost postnumerando isplata (renti) može zapisati:

$$\boxed{A_n = R \cdot IV_p^n}.$$

Primjer:

Ako se danas u banku uloži 30.000,00 kn, koliko se godina može podizati krajem godine po 3.000,00 kn uz kamatnjak p(G) = 8? Ukamaćivanje je složeno, godišnje i dekurzivno.

Rješenje:

$A_n =$ 30.000,00 kn
$R = 3.000,00$ kn
p(G) = 8

---

n = ?

$$r = 1 + \frac{p(G)}{100} = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$$

$$A_n = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} =$$

$$30.000,00 = 3.000,00 \frac{1,08^n - 1}{1,08^n(1,08-1)} \Big| : 3.000,00$$

$$10 = \frac{1,08^n - 1}{1,08^n \cdot 0,08} \Big| \cdot 0,08$$

$$0,8 = \frac{1,08^n - 1}{1,08^n}$$

$$0,8 = 1 - \frac{1}{1,08^n}$$

$$1,08^n = \frac{1}{0,2} \Big| \log$$

$$n \log 1,08 = \log 5$$

$$n = \frac{\log 5}{\log 1,08}$$

$$n = 20,912$$

Kako rezultat nije cijeli broj potrebno je dati njegovo objašnjenje:

20 godina će se moći podizati krajem godine iznos od 3.000,00 kn, a krajem 21. godine još nepotpuni iznos $\hat{R}$ koji ćemo odrediti kao razliku početnog uloga ukamaćenog na 21 godinu umanjenog za konačnu vrijednost prenumerando isplata za razdoblje od 20 godina:

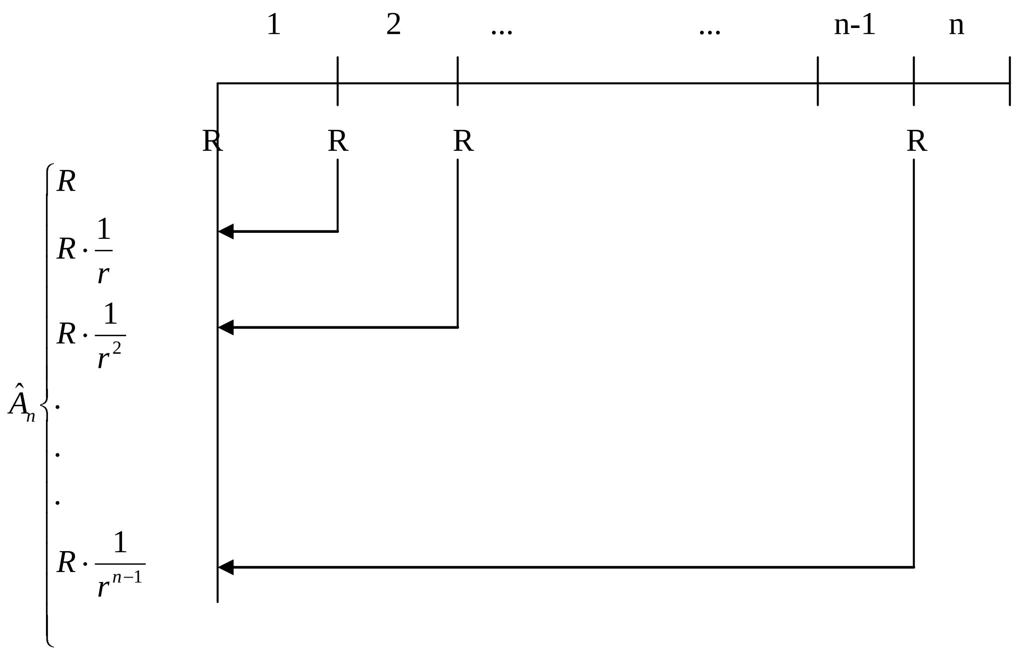
$$\hat{R} = 30.000,00 \cdot 1,08^{21} - 3.000,00 \cdot 1,08 \frac{1,08^{20} - 1}{1,08 - 1}$$

$$\hat{R} = 2.746,25 \text{ kn}$$

Tijekom 20 godina moći će se podizati po 3.000,00 kn, a krajem 21. godine će se još moći podići iznos od 2.746,25 kn.

b) Prenumerando isplate (rente)

Problem je odrediti početnu ili sadašnju vrijednost konstantnih isplata (renti) koje dospijevaju početkom godine tijekom razdoblja ukamaćivanja od n godina uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata te godišnji kamatnjak p(G). Grafički prikaz opisanog problema:



Zbrojimo li svaku pojedinačnu početnu (sadašnju) vrijednost isplata (renti) koje dospijevaju početkom godine, dobit ćemo izraz za početnu (sadašnju) vrijednost prenumerando isplata (renti):

$$\hat{A}_n = R + R \cdot \frac{1}{r} + R \cdot \frac{1}{r^2} + ... + R \cdot \frac{1}{r^{n-2}} + R \cdot \frac{1}{r^{n-1}} = R\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{i-1}}$$

Srednji dio gornjeg izraza je geometrijski niz od n članova čiji je prvi član R, a omjer iznosi $\frac{1}{r}$. Koristeći izraz za zbroj n članova geometrijskog niza, dobijemo

$$\hat{A}_n = R \cdot \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r} - 1} = R \cdot \frac{\frac{1 - r^n}{r^n}}{\frac{1 - r}{r}} = R \cdot \frac{r(1 - r^n)}{r^n(1 - r)} = R \cdot \frac{-(r^n - 1)}{-r^{-1}r^n(r - 1)} = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)},$$

iz čega slijedi izraz za početnu (sadašnju) vrijednost prenumerando isplata (renti):

$$\boxed{\hat{A}_n = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)}}.$$

Za isplatu (rentu) R u vrijednosti jedne novčane jedinice početna (sadašnja) vrijednost prenumerando isplata (renti) iznosi:

$\hat{A}_n = \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)}$ i predstavlja *iznos koji na početku treba uložiti u banku kako bi se početkom godine tijekom n-godišnjeg razdoblja kapitalizacije omogućila isplata (renta) od jedne novčane jedinice.*

Usporedbom izraza za početnu vrijednost prenumerando i postnumerando isplata (renti) dolazimo do zaključka da između tih vrijednosti vrijedi sljedeća relacija:

$$\boxed{\hat{A}_n = r \cdot A_n}.$$

Primjer:

Banka će sljedećih 15 godina, početkom godine, isplaćivati iznos od 20.000,00 kn. Odredite sadašnju vrijednost cijele rente ako je dekurzivni godišnji kamatnjak 6.

Rješenje:

R = 20.000,00
p(G) = 6
n = 15

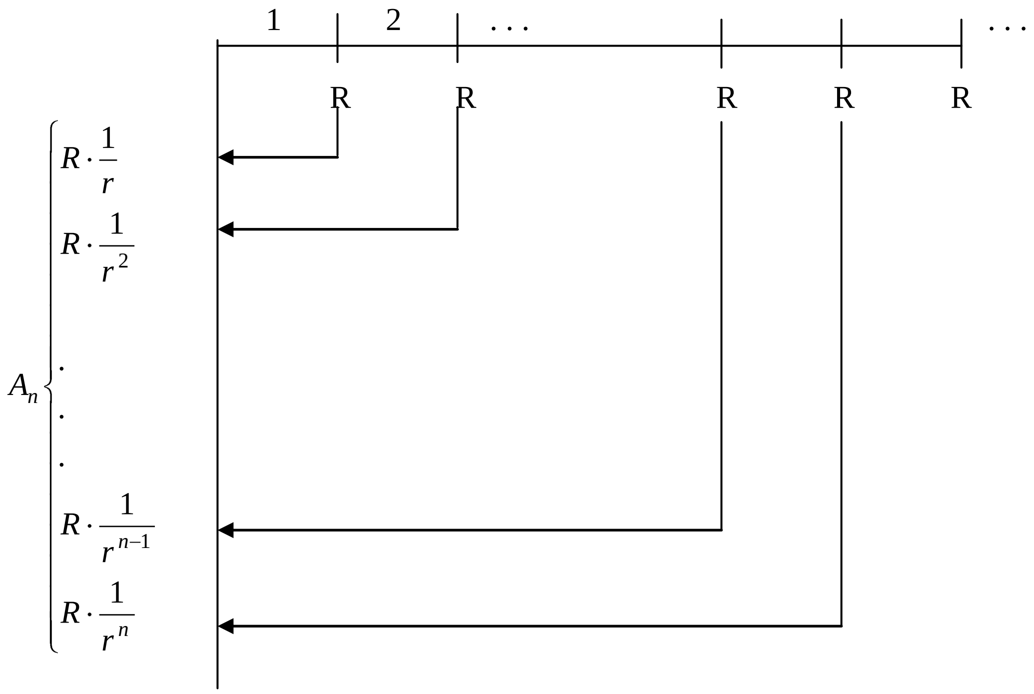
$\hat{A}_{15} = ?$

$$r = 1 + \frac{p(G)}{100} = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$$

$$\hat{A}_n = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} = 20.000{,}00 \cdot \frac{1{,}06^{15} - 1}{1{,}06^{14}(1{,}06 - 1)} = 205.899{,}68 \text{ kn}$$

5.3 Vječna renta

U prethodnim primjerima renta je trajala neko određeno vrijeme. Ukoliko renta traje vječno, njezinu početnu (sadašnju) vrijednost A_∞ uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata te fiksni kamatnjak određujemo uz pomoć grafičkog prikaza kako slijedi:



Budući da $n \to \infty$ $A_\infty = \lim_{n\to\infty}(R\cdot\frac{1}{r} + R\cdot\frac{1}{r^2} + ... + R\cdot\frac{1}{r^{n-1}} + R\cdot\frac{1}{r^n} + ...)$

Desna strana gornje jednakosti predstavlja zbroj beskonačno mnogo članova geometrijskog niza čiji je prvi član $R\cdot\frac{1}{r}$, a omjer između dva susjedna člana iznosi $\frac{1}{r}$.

Da bismo odredili A_∞, potražit ćemo graničnu vrijednost zbroja n članova geometrijskog niza kada $n \to \infty$

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty}\left[R\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[R\left(1-\frac{1}{r^n}\right)\left(\frac{1}{r-1}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[R\left(1-\frac{1}{r^n}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{p(G)}{100}-1}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{100R}{p(G)}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)\right] = \frac{100R}{p(G)}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{r^n}\right) = \frac{100R}{p(G)}\cdot 1 = \frac{100R}{p(G)}.$$

Početna (sadašnja) vrijednost vječne rente uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata jednaka je:

$$\boxed{A_\infty = \frac{100R}{p(G)}}.$$

Primjer:

Odredite sadašnju vrijednost dionica koje donose dividendu krajem svake godine u iznosu od 10.000,00 kn ako dividenda traje vječno, a godišnji kamatnjak p(G) iznosi 9.

Rješenje:

R = 10.000,00
p(G) = 9

$A_\infty = ?$

Dividenda koja se isplaćuje krajem svake godine i traje vječno može se poistovijetiti s vječnom rentom, pa je sadašnja vrijednost dionica zapravo jednaka sadašnjoj vrijednosti vječne rente:

$$A_\infty = \frac{100R}{p(G)} = \frac{100\cdot 10.000,00}{9} = 111.111,11\,\text{kn}$$

Primjer:

Ispitajte da je li isplativije iznajmljivati stan za godišnju neto najamninu u iznosu od 55.000,00 kn ili ga prodati za 1.300.000,00 kn i oročiti dobivenu svotu u banci koja odobrava 5% godišnjih kamata na oročena sredstva.

Rješenje:

N = 55.000,00 kn
A_∞ = 1.300.000,00 kn
p(G) = 5

R = ?

$$A_\infty = \frac{100R}{p(G)} \Rightarrow R = \frac{A_\infty \cdot p(G)}{100} = \frac{1.300.000{,}00 \cdot 5}{100} = 65.000{,}00 \text{ kn}$$

Zaključujemo da je isplativije prodati stan i oročiti novac jer se tako može ostvariti godišnja renta od 65.000,00 kn, za razliku od najamnine u iznosu od 55.000,00 kn.

6. NEPREKIDNO UKAMAĆIVANJE

Kontinuirano ili neprekidno ukamaćivanje predstavlja specijalan slučaj složenog ukamaćivanja: kamate se obračunavaju i pribrajaju glavnici "u svakom trenutku" razdoblja kapitalizacije. Iako je takav način ukamaćivanja u praksi besmislen, njegova je primjena moguća u slučajevima kao što je npr. određivanje prirodnog prirasta, u makroekonomiji, medicini itd.
U nastavku ćemo razmotriti kako odrediti vrijednost glavnice na kraju razdoblja ukamaćivanja uz kontinuirani obračun kamata.

Konačna vrijednost glavnice uz složen, dekurzivni i godišnji obračun kamata određena je izrazom:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{p(G)}{100}\right)^n$$

Ukoliko se kapitalizacija vrši m puta u jednoj godini, konačna vrijednost glavnice uz relativni kamatnjak određuje se izrazom:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{p(G)}{100\cdot m}\right)^{m\cdot n}.$$

Iz zamjene $x = \frac{100\cdot m}{p(G)}$ slijedi $m = \frac{x\cdot p(G)}{100}$ što daje:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{p(G)}{100\cdot\frac{x\cdot p(G)}{100}}\right)^{\frac{x\cdot p(G)}{100}\cdot n}$$ odnosno

$$C_n = C_0\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x\cdot p(G)}{100}\cdot n}.$$

Pretpostavka obračunavanja kamata u svakom trenutku implicira $m\to\infty$ odnosno $x\to\infty$.
Odredimo sada konačnu vrijednost glavnice kao graničnu vrijednost gornjeg izraza:

$$C_n = \lim_{x\to\infty}\left[C_0\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x\cdot p(G)\cdot n}{100}}\right] = C_0\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{n\cdot p(G)}{100}} = C_0 e^{\frac{n\cdot p(G)}{100}}.$$

Dakle, konačna vrijednost glavnice uz kontinuirano ukamaćivanje jednaka je:

$$\boxed{C_n = C_0 e^{\frac{n\cdot p(G)}{100}}}.$$

Primjer:

Odredite prosječni godišnji prirast purana ako on u 2 godine upeterostruči svoju težinu.

Rješenje:

$C_2 = 5C_0$
n = 2

p(G) = ?

$$C_n = C_0 e^{\frac{n\cdot p(G)}{100}}$$

$$C_2 = C_0 e^{\frac{2\cdot p(G)}{100}}$$

$$5C_0 = C_0 e^{\frac{2\cdot p(G)}{100}} \quad \Big|\ln$$

$$\ln 5 = \frac{p(G)}{50}\ln e$$

p(G) = 50 ln5

p(G) = 80,47189

Primjer:

Procijenite težinu djeteta nakon 4 godine ako je dijete rođeno sa 3,4 kg. Prve godine života dijete prosječno dobiva na težini 70%, druge 50%, treće 30%, a četvrte 20%.

Rješenje:

n = 4 g

$C_0 = 3{,}4$ kg

$p_1 = 70$

$p_2 = 50$

$p_3 = 30$

$p_4 = 20$

$C_4 = ?$

$$C_n = C_0 e^{\frac{n \cdot p(G)}{100}}$$

Na kraju prve godine procijenjena težina djeteta iznosi:

$$C_1 = C_0 e^{\frac{1 \cdot 70}{100}} = 3{,}4 \cdot e^{0{,}7} = 6{,}846759205 \text{kg.}$$

Na kraju druge godine procijenjena težina djeteta iznosi:

$$C_2 = C_1 e^{\frac{1 \cdot 50}{100}} = 6{,}846759205 \cdot e^{0{,}5} = 11{,}28839754 \text{kg.}$$

Na kraju treće godine procijenjena težina djeteta iznosi:

$$C_3 = C_2 e^{\frac{1 \cdot 30}{100}} = 11{,}28839754 \cdot e^{0{,}3} = 15{,}23774284 \text{ kg.}$$

Na kraju četvrte godine procijenjena težina djeteta iznosi:

$$C_4 = C_3 e^{\frac{1 \cdot 20}{100}} = 15{,}23774284 \cdot e^{0{,}20} = 18{,}61 \text{ kg.}$$

Rješenje koje smo dobili u nekoliko koraka mogli smo dobiti pomoću izraza čiji izvod slijedi:

$$C_4 = C_3 e^{\frac{1\cdot p_4}{100}} = \overbrace{C_2 e^{\frac{1\cdot p_3}{100}}}^{C_3} e^{\frac{1\cdot p_4}{100}} = \overbrace{C_1 e^{\frac{1\cdot p_2}{100}}}^{C_2} e^{\frac{1\cdot p_3}{100}} e^{\frac{1\cdot p_4}{100}} = \overbrace{C_0 e^{\frac{1\cdot p_1}{100}}}^{C_1} e^{\frac{1\cdot p_2}{100}} e^{\frac{1\cdot p_3}{100}} e^{\frac{1\cdot p_4}{100}}$$

$$C_4 = C_0 e^{\frac{p_1}{100}} e^{\frac{p_2}{100}} e^{\frac{p_3}{100}} e^{\frac{p_4}{100}}$$

ili, općenito:

$$C_n = C_0 e^{\frac{p_1}{100}} e^{\frac{p_2}{100}} e^{\frac{p_3}{100}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{p_n}{100}} = C_0 e^{\frac{1}{100}(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n)}$$ i konačno:

$$\boxed{C_n = C_0 e^{\frac{1}{100}(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n)}}.$$

Rješenje prethodnog zadatka sada se dobije brže i jednostavnije:

$$C_4 = C_0 e^{\frac{1}{100}(p_1+p_2+p_3+p_4)} = 3{,}4 e^{\frac{1}{100}(70+50+30+20)} = 3{,}4 e^{1{,}7} = 18{,}61 \text{ kg}.$$

7. ZAJAM

Zajam predstavlja imovinsko-pravni odnos između zajmodavca i zajmoprimca. Taj se odnos regulira posebnim ugovorom o zajmu tako da se u njemu definiraju:

a) iznos odobrenog zajma
b) kamatnjak
c) način na koji će se obračunati iznos kamata
d) vrijeme otplate zajma
e) način otplate zajma

Zajam zajmoprimac vraća zajmodavcu *anuitetima*. Anuiteti su razdobljeični iznosi koji se sastoje od *otplatnih kvota i kamata*. Naime, krajem razdoblja zajmoprimac je dužan vraćati posuđenu glavnica (zajam), kao i iznos obračunatih, složenih kamata. Pregled otplate zajma nalazi se u otplatnoj tablici (planu) koja se sastoji od stupaca u kojima se navode: razdoblje otplate zajma, anuiteti, kamate, otplatne kvote i ostatak dugovanja.
U nastavku ćemo prikazati razne načine otplate zajma uz dekurzivni obračun kamata.

7.1 Model otplate zajma jednakim anuitetima (dekurzivno)

Pretpostavljamo da se zajam *C* otplaćuje uz složen i dekurzivan obračun kamata i jednake anuitete *a*, krajem razdoblja. Kamatnjak se tijekom cijelog razdoblja otplate zajma ne mijenja. Da bismo odredili izraz za iznos jednakih anuiteta kojima se vraća zajam uočavamo analogiju između jednakih periodičnih uplata krajem godine i jednakih anuiteta a kao i između sadašnje vrijednosti postnumerando uplata i odobrenog zajma. Dakle, izraz za iznos jednakih anuiteta krajem godine bit će analogan izrazu za iznos periodičnih uplata krajem godine (postnumerando):

$$R = A_n \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} \Rightarrow a = C\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}$$

$$\boxed{a = C\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}}$$

Primjer:

Odredite iznos jednakih anuiteta koje će poduzeće otplaćivati krajem godine tijekom 5 godina uz 12 % godišnjih, dekurzivnih kamata za zajam od 150.000,00 kn.

Rješenje:

$C_0 = 150.000{,}00$
n=5
p(G) = 12

a=?

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{12}{100} = 1{,}12$$

$$a = C \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 150.000{,}00\frac{1{,}12^5(1{,}12-1)}{1{,}12^5-1} = 41.611{,}46$$

Za prethodni primjer izradit ćemo otplatnu tablicu koja se sastoji od sljedećih stupaca:

1. *Razdoblje* – označava broj razdoblja u kojem dolazi do novčanog tijeka. Nulto razdoblje je razdoblje u kojemu je odobreni zajam stavljen na raspolaganje. Posljednje razdoblje je ono razdoblje u kojemu dolazi do posljednjeg novčanog tijeka. U nulto razdoblje se upisuje samo iznos odobrenog zajma koji predstavlja ostatak dugovanja.

2. *Anuitet (otplatni obrok)* – u tom stupcu su iznosi koji se sastoje od dijela kojim se vraća glavnica (zajam) i dijela kojim se vraća kamata na glavnicu.

3. *Kamate* – u taj stupac se unosi iznos kamata na ostatak dugovanja koji treba otplatiti za sva razdoblja osim nultog.

4. *Otplatna kvota* – u taj se stupac unose iznosi kojima se vraća glavnica, odnosno zajam.

Za razdoblje k = 1, 2,…, n unose se iznosi kamata, otplatnih kvota i ostatka dugovanja kako slijedi:

$I_k = \frac{C_{k-1}p}{100}$ kamate k – tog razdoblja

$R_k = a - I_k$ otplatna kvota k – tog razdoblja

$C_k = C_{k-1} - R_k$ ostatak dugovanja k – tog razdoblja.

U zadnji redak otplatne tablice unosi se zbroj anuiteta, kamata i otplatnih kvota.

Za naš primjer navedeni koraci izgledaju ovako:

za 1. razdoblje:

k = 1
$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p(G)}{100} = \frac{150.000{,}00 \cdot 12}{100} = 18.000{,}00$$
$$R_1 = a - I_1 = 41.611{,}46 - 18.000{,}00 = 23.611{,}46$$
$$C_1 = C_0 - R_1 = 150.000{,}00 - 23.611{,}46 = 126.388{,}54$$

za 2. razdoblje:

k = 2
$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p(G)}{100} = \frac{126.0388{,}54 \cdot 12}{100} = 15.166{,}62$$
$$R_2 = a - I_2 = 41.611{,}46 - 15.166{,}62 = 26.444{,}84$$
$$C_2 = C_1 - R_2 = 126.388{,}54 - 26.444{,}84 = 99.943{,}70$$

za 3. razdoblje:

k = 3
$$I_3 = \frac{C_2 \cdot p(G)}{100} = \frac{99.943{,}70 \cdot 12}{100} = 11.993{,}24$$
$$R_3 = a - I_3 = 41.611{,}46 - 11.993{,}24 = 29.618{,}22$$
$$C_3 = C_2 - R_3 = 99.943{,}70 - 29.618{,}22 = 70.325{,}48$$

za 4. razdoblje:

k = 4
$$I_4 = \frac{C_3 \cdot p(G)}{100} = \frac{70.325{,}48 \cdot 12}{100} = 8.439{,}06$$
$$R_4 = a - I_4 = 41.611{,}46 - 8.439{,}06 = 33.172{,}40$$
$$C_4 = C_3 - R_4 = 70.325{,}48 - 33.172{,}40 = 37.153{,}08$$

za 5. razdoblje:

k = 5
$$I_5 = \frac{C_4 \cdot p(G)}{100} = \frac{37.153{,}08 \cdot 12}{100} = 4.458{,}37$$
$$R_5 = a - I_5 = 41.611{,}46 - 4.458{,}37 = 37.153{,}08$$
$$C_5 = C_4 - R_5 = 37.153{,}08 - 37.153{,}08 = 0$$

Otplatna tablica izgleda ovako:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				150.000,00
1	41.611,46	18.000,00	23.611,46	126.388,54
2	41.611,46	15.166,62	26.444,84	99.943.70

3	41.611,46	11.993,24	29.618,22	70.325,48
4	41.611,46	8.439,06	33.172,40	37.153,08
5	41.611,46	4.458,37	37.153,08	0
$\sum$	208.057,30	58.057,29	150.000,00	

Primjećujemo da je zbroj svih anuiteta jednak zbroju svih kamata i otplatnih kvota. Također zbroj svih otplatnih kvota jednak je iznosu zajma tj. ostatku dugovanja na početku. Vidimo i da je ostatak dugovanja iz predzadnjeg razdoblja jednak otplatnoj kvoti zadnjega razdoblja.
Općenito, ispravnost izrađene otplatne tablice možemo provjeriti u tijeku izrade ili nakon što je tablica izrađena.

Kontrola u tijeku izrade otplatne tablice

a) Kontrola otplatnih kvota

Da bismo došli do veze između otplatnih kvota, krećemo od pojma anuiteta. Anuiteti su jednaki zbroju kamata i otplatnih kvota:

$\boxed{a = I_k + R_k}$.

U nastavku ćemo razmotriti jednakosti koje povezuju otplatne kvote pojedinih razdoblja kako slijedi:[4]

k = 1 $$a = I_1 + R_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} + R_1$$

k = 2 $$a = I_2 + R_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} + R_2 = \frac{\overbrace{(C_0 - R_1)}^{C_1} p}{100} + R_2$$

k = 3 $$a = I_3 + R_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} + R_3 = \frac{\overbrace{(C_0 - R_1 - R_2)}^{C_2} p}{100} + R_3$$

$\vdots$

k = n $$a = I_n + R_n = \frac{C_{n-1} \cdot p}{100} + R_n = \frac{\overbrace{(C_0 - R_1 - R_2 - \ldots - R_{n-1})}^{C_{n-1}} p}{100} + R_n$$

Postavljamo jednakost koja povezuje drugu i prvu otplatnu kvotu:

[4] Gospodarska matematika, B. Relić, str. 198. - 200.

$$\frac{C_0 \cdot p}{100} + R_1 = \frac{\overbrace{(C_0 - R_1)}^{C_1} p}{100} + R_2$$

$$\frac{C_0 \cdot p}{100} + R_1 = \frac{C_0 p}{100} - \frac{R_1 \cdot p}{100} + R_2$$

$$R_2 = \frac{C_0 \cdot p}{100} + R_1 - \frac{C_0 \cdot p}{100} + \frac{R_1 \cdot p}{100}$$

$$R_2 = R_1 (1 + \frac{p}{100})$$

$$R_2 = R_1 \cdot r$$

Nastavljamo s jednakosti koja povezuje treću i drugu otplatnu kvotu:

$$\frac{C_1 \cdot p}{100} + R_2 = \frac{C_2 \cdot p}{100} + R_3$$

$$\frac{(C_0 - R_1) \cdot p}{100} + R_2 = \frac{C_0 \cdot p}{100} - \frac{R_1 \cdot p}{100} - \frac{R_2 \cdot p}{100} + R_3$$

$$R_3 = \frac{C_0 \cdot p - R_1 \cdot p}{100} + R_2 - \frac{C_0 \cdot p}{100} + \frac{R_1 \cdot p}{100} + \frac{R_2 \cdot p}{100}$$

$$R_3 = \frac{C_0 \cdot p}{100} - \frac{R_1 \cdot p}{100} + R_2 - \frac{C_0 \cdot p}{100} + \frac{R_1 \cdot p}{100} + \frac{R_2 \cdot p}{100} = R_2 (1 + \frac{p}{100})$$

$$R_3 = R_2 \cdot r$$

Zaključujemo da općenito vrijedi jednakost:

$$\boxed{R_k = R_{k-1} \cdot r}$$

ili izraženo financijskim tablicama:

$$\boxed{R_k = R_{k-1} \cdot I_p^1}.$$

Kontrolirajmo vrijednost R_4 iz prethodnog primjera:

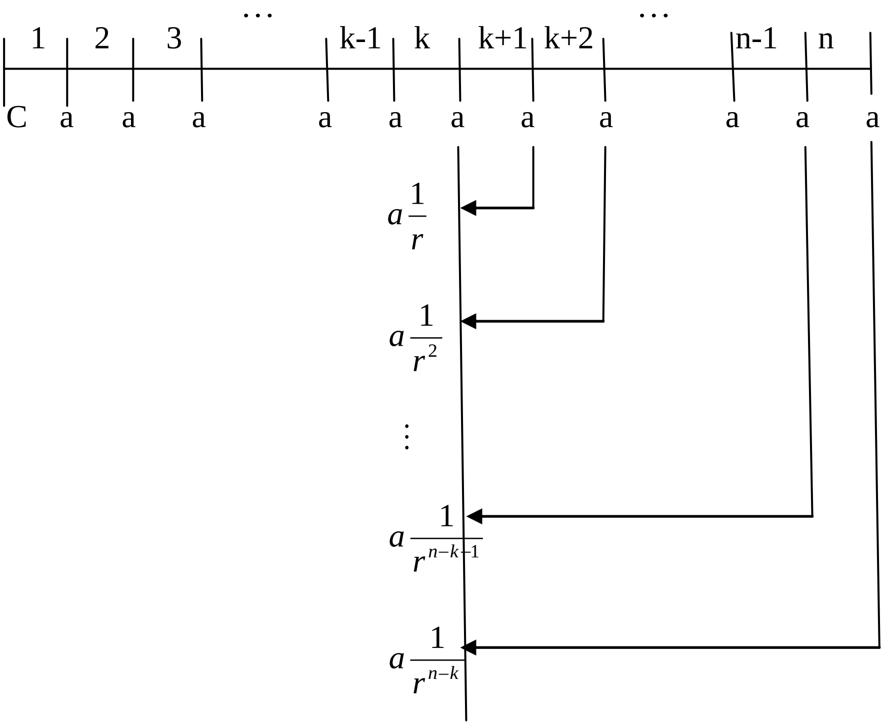
$$R_4 = R_3 \cdot r$$

$$33.172,40 = 29.618,22 \cdot 1,12$$

$$33.172,40 = 33.172,40$$

b) Kontrola ostatka duga[5]

Ostatak dugovanja može se prikazati kao zbroj vrijednosti anuiteta koji dospijevaju nakon k–tog razdoblja u trenutku k–tog razdoblja. Grafički to možemo prikazati:



Ostatak dugovanja na kraju k-tog razdoblja jednak je zbroju:

$$C_k = a\frac{1}{r} + a\frac{1}{r^2} + \ldots + a\frac{1}{r^{n-k-1}} + a\frac{1}{r^{n-k}}.$$

Desna strana gornje jednakosti predstavlja zbroj n-k članova geometrijskog niza u kojemu je prvi član $a\frac{1}{r}$, a stalan omjer između dvaju susjednih članova $\frac{1}{r}$. Primjenom izraza za zbroj n–k članova geometrijskog niza odredit ćemo izraz za ostatak dugovanja C_k kako slijedi:

$$C_k = \frac{a}{r}\frac{(\frac{1}{r})^{n-k}-1}{\frac{1}{r}-1} = a\frac{\frac{1}{r^{n-k}}-1}{r\frac{1-r}{r}} = a\frac{\frac{1-r^{n-k}}{r^{n-k}}}{1-r} = a\frac{-(r^{n-k}-1)}{-r^{n-k}(r-1)} = a\frac{r^{n-k}-1}{r^{n-k}(r-1)}$$

$$\boxed{C_k = a\frac{r^{n-k}-1}{r^{n-k}(r-1)}} \quad \text{ili} \quad \boxed{C_k = a \cdot IV_p^{n-k}}.$$

Kontrolirajmo ostatak duga na kraju treće godine iz prethodnog primjera:

---

[5] Gospodarska matematika, B. Relić, str. 201.

p(G) = 12
a = 41.611,46
n = 5 g
k = 3
$C_3 = 70.325{,}48$

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}12$$

$$C_3 = a\frac{r^{5-3} - 1}{r^{5-3}(r-1)} = 41.611{,}46\frac{1{,}12^2 - 1}{1{,}12^2 \cdot 0{,}12} = 70.325{,}48$$

c) Zadnja otplatna kvota jednaka je predzadnjem ostatku duga:

$$R_k = C_{k-1}$$
$$R_5 = C_4$$
$$37.153{,}08 = 37.153{,}08$$

<u>**Kontrola nakon izrade otplatne tablice**</u>

a) Budući da se otplatnim kvotama vraća odobreni zajam, odnosno glavnica, logično je da zbroj svih otplatnih kvota mora biti jednak odobrenomu zajmu:

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = C_0$$

$$\sum_{k=1}^{5} R_k = 150.000{,}00$$

b) Kako se anuitet sastoji od kamata i otplatne kvote za pojedino razdoblje, zbroj svih anuiteta mora biti jednak zbroju ukupnih kamata i ukupnih otplatnih kvota:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} I_k + \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Kako se radi o modelu otplate zajma jednakim anuitetima, vrijedi sljedeća jednakost:

$$n \cdot a = \sum_{k=1}^{n} I_k + C_0.$$

Primjer:

Treća otplatna kvota iznosi 6.526,11 kn, a deseta 6.807,41 kn. Odredite iznos zajma koji se otplaćuje 12 godina po modelu obračuna zajma jednakim anuitetima koji dospijevaju krajem godine. Obračun je složen, godišnji i dekurzivni.

Rješenje:

$R_3 = 6.526.11$

$R_{10} = 6.807,31$

n = 12

C = ?

Rješenje:

Krenut ćemo od izraza $R_k = R_{k-1} \cdot r$ kako bi došli do izraza koji povezuje treću i desetu otplatnu kvotu:

$$R_k = R_{k-1} \cdot r \qquad R_{10} = R_9 \cdot r = R_8 \cdot r \cdot r = \ldots = R_3 \cdot r^7$$

$$R_{10} = R_3 \cdot r^7$$

$$r^7 = \frac{6.807{,}31}{6.526{,}11} = 1{,}043088455 / \log$$

7 log r = log 1,043088455

r = 1,006044765

$$R_3 = R_2 \cdot r = \overbrace{R_1 \cdot r}^{R_2} \cdot r = R_1 \cdot r^2$$

$$R_1 = \frac{R_3}{r^2} \approx 6.447{,}92$$

$$C = R_1 \frac{r^{12} - 1}{r - 1} = 6.447{,}92 \frac{1{,}006044765^{12} - 1}{1{,}006044765 - 1} = 80.000{,}00 \text{ kn}$$

Primjer:

Zbroj druge i četvrte otplatne kvote zajma iznosi 59.617,24 kn. Odredite iznos zajma koji je odobren, ako se on amortizira jednakim anuitetima krajem godine tijekom pet godina uz godišnji kamatnjak 12. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.

Rješenje:

$R_2 + R_4 = 59.617,24$
n =5 g
p(G) = 12

$r = 1 + \frac{p}{100} = 1,12$

$\left.\begin{aligned} R_2 &= R_1 \cdot r \\ R_4 &= R_1 \cdot r^3 \end{aligned}\right\} +$

$R_2 + R_4 = R_1 \cdot r + R_1 \cdot r^3 = 59.617,24$

$\Rightarrow R_1(r + r^3) = 59.617,24$

$\Rightarrow R_1 = \frac{59.617,24}{1,12 + 1,12^3} = 23.611,46$

$C = R_1 \frac{r^5 - 1}{r - 1} = 23.611,46 \frac{1,12^5 - 1}{1,12 - 1} = 150.000,00\,\text{kn}$

Primjer:

Banka je poduzeću odobrila zajam u iznosu od 200.000,00 kn na 3 godine uz 12 % dekurzivnih godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta krajem polugodišta. Izradite otplatnu tablicu za polugodišnji, složen i dekurzivni obračun kamata.

Rješenje:

Kako je zadan godišnji kamatnjak, a ukamaćivanje je polugodišnje, najprije ćemo odrediti polugodišnji konformni kamatnjak.

$$p^{'}(d) = 100\left[(1 + \frac{p(d_1)}{100})^{\frac{1}{m}} - 1\right] = 100\left[(1 + \frac{12}{100})^{\frac{1}{2}} - 1\right] = 5,83005244$$

r' = 1,0583005244

Broj anuiteta: n = 3 m = 6 polugodišnji anuitet:

$$a = C_0 \frac{r_k^n (r_k - 1}{r_k^n - 1} = 200.000,00 \frac{1,0583005244^6 (1,0583005244 - 1)}{1,0583005244^6 - 1} = 40.455,61 \text{ kn}$$

za k = 1 $I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{200.000,00 \cdot 5,83005244}{100} = 11.660,10$

$$R_1 = a - I_1 = 40.455{,}61 - 11.660{,}10 = 28.795{,}51$$
$$C_1 = C_0 - R_1 = 200.000{,}00 - 28.795{,}51 = 171.204{,}49$$

za k = 2 $$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{171.204{,}49 \cdot 5{,}83005244}{100} = 9.981{,}31$$
$$R_2 = a - I_2 = 40.455{,}61 - 9.981{,}31 = 30.474{,}30$$
$$C_2 = C_1 - R_2 = 171.204{,}49 - 30.474{,}30 = 140.730{,}19$$

za k =3 $$I_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{140.730{,}19 \cdot 5{,}83005244}{100} = 8.204{,}64$$
$$R_3 = a - I_3 = 40.455{,}61 - 8.204{,}64 = 32.250{,}97$$
$$C_3 = C_2 - R_3 = 140.730{,}19 - 32.250{,}97 = 108.479{,}22$$

za k = 4 $$I_4 = \frac{C_3 \cdot p}{100} = \frac{108.479{,}22 \cdot 5{,}83005244}{100} = 6.324{,}40$$
$$R_4 = a - I_4 = 40.455{,}61 - 6.324{,}40 = 34.131{,}21$$
$$C_4 = C_3 - R_4 = 108.479.22 - 34.131{,}21 = 74.348{,}01$$

za k = 5 $$I_5 = \frac{C_4 \cdot p}{100} = \frac{74.348{,}01 \cdot 5{,}83005244}{100} = 4.334{,}53$$
$$R_5 = a - I_5 = 40.455{,}61 - 4.334{,}53 = 36.121{,}08$$
$$C_5 = C_4 - R_5 = 74.348{,}01 - 36.121{,}08 = 38.226{,}93$$

za k = 6 $$I_6 = \frac{C_5 \cdot p}{100} = \frac{38.226{,}93 \cdot 5{,}83005244}{100} = 2.228{,}65$$
$$R_6 = a - I_6 = 40.455{,}61 - 2.228{,}65 = 38.226{,}96$$
$$C_6 = C_5 - R_6 = 38.226{,}93 - 38.226.96 = -3$$ [6]

Slijedi pripadna otplatna tablica:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				200.000,00
1	40.455,61	11.660,10	28.795,51	171.204,49
2	40.455,61	9.981,31	30.474,30	140.730,19
3	40.455,61	8.204,64	32.250,97	108.479,22
4	40.455,61	6.324,40	34.131,21	74.348,01
5	40.455,61	4.334,53	36.121,08	38.226,93
6	40.455,61	2.228,65	38.226,96	-3
$\sum$	242.733,66	42.733,63	200.000,00	

[6] Zbog zaokruživanja decimalnih vrijednosti može doći do minimalnih razlika između zadnje otplatne kvote i predzadnjeg ostatka dugovanja.

Primjer:

Zajam od 250.000,00 kn odobren je na tri godine uz 10% godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta krajem polugodišta uz polugodišnji, složen i dekurzivan obračun kamata.

Rješenje:

Budući da je ukamaćivanje polugodišnje, a kamate godišnje, potrebno je preračunati nominalni kamatnjak u relativni ili konformni. Prikazat ćemo obračun u oba slučaja, kako slijedi:

C=250.000,00
n = 3 godine = 6 polugodišta
p(G) = 10

$$m = \frac{d_1}{d} = \frac{1G}{1P} = \frac{2P}{1P} = 2$$

a) Odredit ćemo polugodišnji relativni kamatnjak i odgovarajući dekurzivni kamatni faktor:

$$\overline{p}(P) = \frac{p(G)}{2} = \frac{10}{2} = 5 \qquad \overline{r} = 1 + \frac{\overline{p}(P)}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$$

Polugodišnji anuitet jednak je:

$$a = C\frac{\overline{r}^{mn}(\overline{r}-1)}{\overline{r}^{mn}-1} = 250000\frac{1{,}05^{2\cdot 3}\cdot 0{,}05}{1{,}05^{2\cdot 3}-1} = 49.254{,}37\text{ kn.}$$

Otplatna tablica je jednaka:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				250.000,00
1	49.254,37	12.500,00	36.754,37	213.245,63
2	49.254,37	10.662,28	38.592,09	174.653,54
3	49.254,37	8.732,68	40.521,69	134.131,85
4	49.254,37	6.706,59	42.547,78	91.584,07
5	49.254,37	4.579,20	44.675,17	46.908,90
6	49.254,37	2.345,45	46.908,92	-0,02
$\sum$	295.526,20	45.526,20	250.000,02	

b) Odredit ćemo polugodišnji konformni kamatnjak i odgovarajući dekurzivni kamatni faktor:

$$p'(P)=100\left[(1+\frac{p(G)}{100})^{\frac{1}{m}}-1\right]=100\left[(1+\frac{10}{100})^{\frac{1}{2}}-1\right]=4{,}880884817$$

$$\text{r}' = 1+\frac{p'(P)}{100}=1{,}048808848$$

Polugodišnji anuitet jednak je:

$$a=C\frac{(r')^{mn}(r'-1)}{(r')^{mn}-1}=250000\frac{(1{,}048808848)^6(1{,}048808848-1)}{(1{,}048808848)^6-1}=49.066{,}90\ \text{kn.}$$

Otplatna tablica je jednaka:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k=a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				250.000,00
1	49.066,90	12.202,20	36.864,70	213.135,30
2	49.066,90	10.402,88	38.664,02	174.471,28
3	49.066,90	8.515,73	40.551,17	133.920,11
4	49.066,90	6.536,48	42.530,42	91.389,69
5	49.066,90	4.460,62	44.606,28	46.783,41
6	49.066,90	2.283,44	46.783,46	-0.05
$\sum$	294.401,40	44.401,35	250.000,05	

Ako usporedimo rezultate koje smo dobili korištenjem relativnog i konformnog kamatnjaka, vidimo da je iznos anuiteta uz relativni kamatnjak veći od iznosa anuiteta uz konformni kamatnjak. Također je i iznos ukupnih kamata u tom slučaju veći. To vrijedi uvijek kada je m > 1 pa se može zaključiti da je korištenje relativnog kamatnjaka tada za zajmodavca isplativije nego korištenje konformnog kamatnjaka. Toga se očito drže i naše banke koje već nekoliko godina umjesto konformnog kamatnjaka koriste relativni kamatnjak kod obračuna zajma.

Interkalarne kamate

Kamate koje zajmoprimac plaća za korištenje sredstava *od trenutka kada su mu sredstva dostavljena do trenutka stavljanja zajma u otplatu* (obično se radi o danima) nazivaju se interkalarne kamate. Obračun interkalarnih kamata može se vršiti na dva načina:

a) po složenom kamatnom računu i nakon toga se isplaćuju odjednom

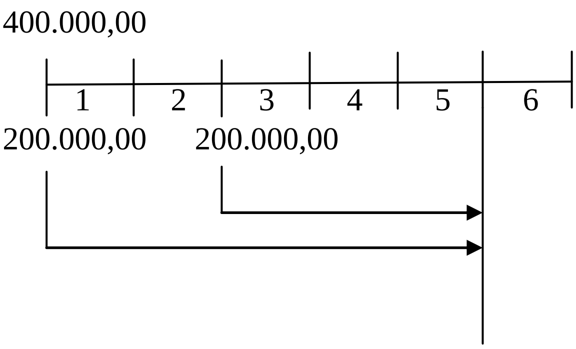
b) po složenom kamatnom računu i nakon toga se pripisuju iznosu zajma u trenutku stavljanja zajma u otplatu.

Primjer:

Poduzeće je dobilo zajam kako slijedi: početkom prve godine doznačen je dio zajma (tranša) u iznosu od 200.000,00 kn. Početkom treće godine doznačeno je još 200.000,00 kn. Rok otplate je 6 godina, uz kamatnjak 8, anuiteti su jednaki i plaćaju se krajem godine, a počinju se vraćati krajem 5. godine. Obračun kamata je godišnji i dekurzivni. Odredite visinu anuiteta i interkalarne kamate za oba načina obračuna.

Rješenje:

Radi boljeg razumijevanja zadatka poslužit ćemo se grafičkim prikazom.



a)

$$I_k = 200.000{,}00 \cdot 1{,}08^5 + 200.000{,}00 \cdot 1{,}08^3 - 400.000{,}00$$
$$I_k = 293.865{,}62 + 251.942{,}40 - 400.000{,}00$$
$$I_k = 145.808{,}02 \text{ kn}$$

$$a = C_0 \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 400.000{,}00 \frac{1{,}08(1{,}08-1)}{1{,}08-1} = 432.000{,}00 \text{ kn}$$

b)

Na kraju pete godine interkalarne kamate dodaju se odobrenome kreditu, pa je u tom slučaju

$$\hat{C}_0 = 400.000{,}00 + 145.808{,}02 = 545.808.02 \text{ kn}$$

$$n_1 = 6$$
$$n = n_1 - 5 = 1$$
p(G) = 8

$$a = \hat{C}_0 \frac{r^n (r-1)}{r^n - 1} = 545.808{,}02 \frac{1{,}08(1{,}08-1)}{1{,}08-1} = 589.472{,}66 \text{ kn}$$

Primjer:

Ivan je odlučio kupiti automobil čija je cijena 120.000,00 kn. Kako raspolaže s gotovinom u iznosu od 30.000,00 kn, za ostatak od 90.000,00 obratio se banci. Sklopio je ugovor o potrošačkom kreditu u kojemu su sljedeći podaci:

1) nominalni iznos glavnice	90.000,00
2) nominalni godišnji kamatnjak	12 %
3) depozit (20%)	18.000,00
4) naknada za obradu zahtjeva (1%)	900,00
5) rok otplate	7 godina
6) broj anuiteta u godini	4
7) ukupan broj anuiteta	28
8) početak roka otplate	1. 5. 2004.
9) dospijeće prvog anuiteta	1. 7. 2004.
10) datum isplate kredita	18. 4. 2004.

Interkalarne kamate teku od dana isplate kredita 18. 4. 2004. do početka roka otplate 1. 5. 2004. Banka je 1. 1. 2007. smanjila kamatnjak sa 12% na 10% godišnje. Izračunajte:

a) tromjesečni konformni kamatnjak od godišnjeg kamatnjaka 12%
b) tromjesečni anuitet
c) za vrijeme od 1. 1. 2007. tromjesečni konformni kamatnjak od godišnjeg kamatnjaka 10%
d) novi tromjesečni anuitet
e) otplatnu tablicu
f) interkalarne kamate
g) ukupne troškove kredita

Rješenje:

a)
m = 12
n = 3
p(G) = 12

$$p' = 100\left[\sqrt[m]{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n} - 1\right] = 100\left[\sqrt[12]{\left(1+\frac{12}{100}\right)^3} - 1\right] = 2{,}873734472$$

b)
u 7 godina dospijeva n = 28 anuiteta

$$r' = 1 + \frac{p'}{100} = 1 + \frac{2,873734472}{100} = 1,028737345$$

$$a = C\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 90.000,00\frac{1,028737345^{28}(1,028737345-1)}{1,028737345^{28} - 1} = 4.722,65 \text{ kn}$$

c) Izračun novog tromjesečnog konformnog kamatnjaka:

$$p' = 100\left[\sqrt[m]{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n} - 1\right] = 100\left[\sqrt[12]{\left(1+\frac{10}{100}\right)^3} - 1\right] = 2,411368908$$

d) Izračun novog anuiteta: Za 17 anuiteta (koliko ih je preostalo od ukupno 28) i ostatak glavnice u iznosu od 62.815,78 kn (vidi sljedeću tablicu) određujemo novu vrijednost.

$$r' = 1 + \frac{p'}{100} = 1 + \frac{2,411368908}{100} = 1,02411368908$$

$$a = C\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 62.815,78\frac{1,02411368908^{17}(1,02411368908-1)}{1,02411368908^{17} - 1} = 4.547,77$$

e) Otplatna tablica

	Dospijeće	Početno stanje	Kamata	Otplata	Novo stanje	Anuitet
1. anuitet	1.7.2004.	90.000,00	2.586,36	2.136,29	87.863,71	4.722,65
2. anuitet	1.10.2004.	87.863,71	2.524,97	2.197,68	85.666,03	4.722,65
3. anuitet	1.1.2005.	85.666,03	2.461.81	2.260,84	83.405,07	4.722,65
4. anuitet	1.4.2005.	83.405,19	2.396,84	2.325,81	81.079,38	4.722,65
5. anuitet	1.7.2005.	81.079,38	2.330,01	2.392,64	78.686,74	4.722,65
6. anuitet	1.10.2005.	78.686,74	2.261,25	2.461,40	76.225,34	4.722,65
7. anuitet	1.1.2006.	76.225,34	2.190,51	2.532,14	73.693,20	4.722,65
8. anuitet	1.4.2006.	73.693,20	2.117,75	2.604,90	71.088,30	4.722,65
9. anuitet	1.7.2006.	71.088,30	2.042,89	2.679,76	68.408,54	4.722,65
10.anuitet	1.10.2006.	68.408,54	1.965,88	2.756,77	65.651,77	4.722,65
11.anuitet	1.1.2007.	65.651,77	1.886,66	2.835,99	62.815,78	4.722,65
12.anuitet	1.4.2007.	62.815,78	1.514,72	3.033,05	59.782,73	4.547,77
13.anuitet	1.7.2007.	59.782,73	1.441,58	3.106,19	56.676,54	4.547,77
14.anuitet	1.10.2007.	56.676,54	1.366,68	3.181,09	53.495,45	4.547,77
15.anuitet	1.1.2008.	53.495,45	1.289,97	3.257,80	50.237,65	4.547,77
16.anuitet	1.4.2008.	50.237,65	1.211,42	3.336,35	46.901,30	4.547,77
17.anuitet	1.7.2008.	46.901,30	1.130,96	3.416,81	43.484,49	4.547,77
18.anuitet	1.10.2008.	43.484,49	1.048,57	3.499,20	39.985,29	4.547,77
19.anuitet	1.1.2009.	39.985,29	964,19	3.583,58	36.401,71	4.547,77
20.anuitet	1.4.2009.	36.401,71	877,78	3.669,99	32.731,72	4.547,77
21.anuitet	1.7.2009.	32.731,72	789,28	3.758,49	28.973,23	4.547,77
22.anuitet	1.10.2009.	28.973,23	698,65	3.849,12	25.124,11	4.547,77

23.anuitet	1.1.2010.	25.124,11	605,83	3.941,94	21.182,17	4.547,77
24.anuitet	1.4.2010.	21.182,17	510,78	4.036,99	17.145,18	4.547,77
25.anuitet	1.7.2010.	17.145,18	413,43	4.134,34	13.010,84	4.547,77
26.anuitet	1.10.2010.	13.010,84	313,74	4.234,03	8.776,81	4.547,77
27.anuitet	1.1.2011.	8.776,81	211,64	4.336,13	4.440,68	4.547,77
28.anuitet	1.4.2011.	4.440,68	107,07	4.440,68	0	4.547,75
Ukupno			39.261,23	90.000,00		129.261,23

f) Izračun interkalarnih kamata:
Interkalarne kamate se izračunavaju za razdoblje od 18. 4. 2004. do 1. 5. iste godine tj. za 13 dana:

$$I = C\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n} - 1\right] = 90.000{,}00\left[\left(1+\frac{12}{100}\right)^{\frac{13}{366}} - 1\right] = 363{,}01 \text{ kn}$$

g) Ukupni troškovi zajma:

Naknada za obradu zahtjeva	900,00
Interkalarne kamate	363,01
Zbroj kamata u anuitetima	39.261,23
Ukupni troškovi	40.524,24 kn

Primjer:

Poduzeće je dobilo zajam u iznosu od 300.000,00 kn na rok od 4 godine, uz godinu počeka i 8% godišnjih, složenih i dekurzivnih kamata. Plaćanje jednakih anuiteta je krajem godine, a interkalarne kamate se obračunavaju i dodaju iznosu zajma u početku otplate zajma. Izradite otplatnu tablicu.

Rješenje:
$C_0 = 300.000,00$
$n = 4$
$p(G) = 8$

Kako je zajam odobren s počekom od jedne godine, obračunat ćemo interkalarne kamate za to vrijeme i dobiveni iznos pribrojiti iznosu odobrenog zajma. Interkalarne kamate su jednake razlici vrijednosti zajma nakon godine dana i odobrenog zajma. Zato ćemo najprije odrediti dekurzivni kamatni faktor, a nakon toga interkalarne kamate.

$$r = 1 + \frac{p(G)}{100} = 1{,}08$$

$$I = C_1 - C_0 = C_0 r - C_0 = C_0(r-1) = 300.000{,}00(1{,}08-1) = 24.000{,}00 \text{ kn}$$

Kad pribrojimo iznos interkalarnih kamata iznosu odobrenog zajma, dobit ćemo iznos zajma C koji će poduzeće vraćati:

$$C = C_0 + I = 300.000{,}00 + 24.000{,}00 = 324.000{,}00\,.$$

Nastavljamo s izračunom jednakih godišnjih anuiteta:

$$a = C\frac{r^4(r-1)}{r^4-1} = 324000\frac{1{,}08^4(1{,}08-1)}{1{,}08^4-1} = 97.822{,}34\,.$$

Izradit ćemo otplatnu tablicu za četiri godine otplate zajma:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				324.000,00
1	97.822,34	25.920,00	71.902,34	252.097,66
2	97.822,34	20.167,81	77.654,53	174.443,13
3	97.822,34	13.955,45	83.866,89	90.576,24
4	97.822,34	7.246,10	90.576,24	
$\sum$	391.289,36	67.289,36	324.000,00	

7.2 Model otplate zajma dogovorenim jednakim anuitetima (dekurzivno)

U praksi se često radi jednostavnijeg obračuna zajma, kao i pružanja prilike zajmoprimcu da odredi iznos anuiteta za koji pretpostavlja da će moći otplaćivati, primjenjuje model otplate zajma unaprijed dogovorenim anuitetima.

Primjer:

Poduzeće traži zajam u iznosu od 230.000,00 kn uz 15 % godišnjih dekurzivnih kamata i procjenjuje da će moći plaćati anuitete od po 80.000,00 kn krajem godine uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata. Izradite otplatnu tablicu.

Rješenje:

$C_0 = 230.000{,}00$

p(G) = 15

a = 80.000,00

Najprije ćemo odrediti broj godina otplate zajma, tj. vrijeme amortiziranja zajma uz pomoć sljedećeg izraza:

$$\boxed{n = \frac{\log a - \log\left[a - C_0(r-1)\right]}{\log r}}$$

$$n = \frac{\log 80.000{,}00 - \log\left[80.000{,}00 - 230.000{,}00(1{,}15-1)\right]}{\log 1{,}15} = 4{,}03768$$

Kako je n veći od 4, zaključujemo da će poduzeće 4 godine plaćati dogovoreni anuitet, a pete godine nepotpuni ili krnji anuitet.
Nepotpuni anuitet odredit ćemo iz izraza:

$$\boxed{a'_{n+1} = Cr^{n+1} - a \cdot r\frac{r^n - 1}{r-1}}$$

$$a'_{4+1} = 230000 \cdot 1{,}15^{4+1} - 80000 \cdot 1{,}15\frac{1{,}15^4 - 1}{1{,}15-1} = 3.221{,}66$$

$$a'_5 = 3.221{,}66$$

Nastavljamo s izračunom elemenata otplatne tablice:

a) $I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$

b) $R_k = a - I_k$

c) $C_k = C_{k-1} - R_k$

za k = 1

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{230.000{,}00 \cdot 15}{100} = 34.500{,}00$$
$$R_1 = a - I_1 = 80.000{,}00 - 34.500{,}00 = 45.500{,}00$$
$$C_1 = C_0 - R_1 = 230.000{,}00 - 45.500{,}00 = 184.500{,}00$$

za k = 2

$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{184.500{,}00 \cdot 15}{100} = 27.675{,}00$$
$$R_2 = a - I_2 = 80.000{,}00 - 27.675{,}00 = 52.325{,}00$$
$$C_2 = C_1 - R_2 = 184.500{,}00 - 52.325{,}00 = 132.175{,}00$$

za k =3

$$I_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{132.175{,}00 \cdot 15}{100} = 19.826{,}25$$
$$R_3 = a - I_3 = 80.000{,}00 - 19.826{,}25 = 60.173{,}75$$
$$C_3 = C_2 - R_3 = 132.175{,}00 - 60.173{,}75 = 72.001{,}25$$

za k = 4

$$I_4 = \frac{C_3 \cdot p}{100} = \frac{72.001{,}25 \cdot 15}{100} = 10.800{,}19$$
$$R_4 = a - I_4 = 80.000{,}00 - 10.800{,}19 = 69.199{,}81$$
$$C_4 = C_3 - R_4 = 72.001{,}25 - 69.199{,}81 = 2.801{,}44$$

za k = 5 $\quad I_5 = \dfrac{C_4 \cdot p}{100} = \dfrac{2.801,44 \cdot 15}{100} = 420,22$

$$R_5 = C_4 = 2.801,44$$

$$C_5 = C_4 - R_5 = 2.801,44 - 2.801,44 = 0$$

Nepotpuni anuitet možemo sada odrediti i kao zbroj otplatne kvote na kraju petog razdoblja i odgovarajućih kamata:

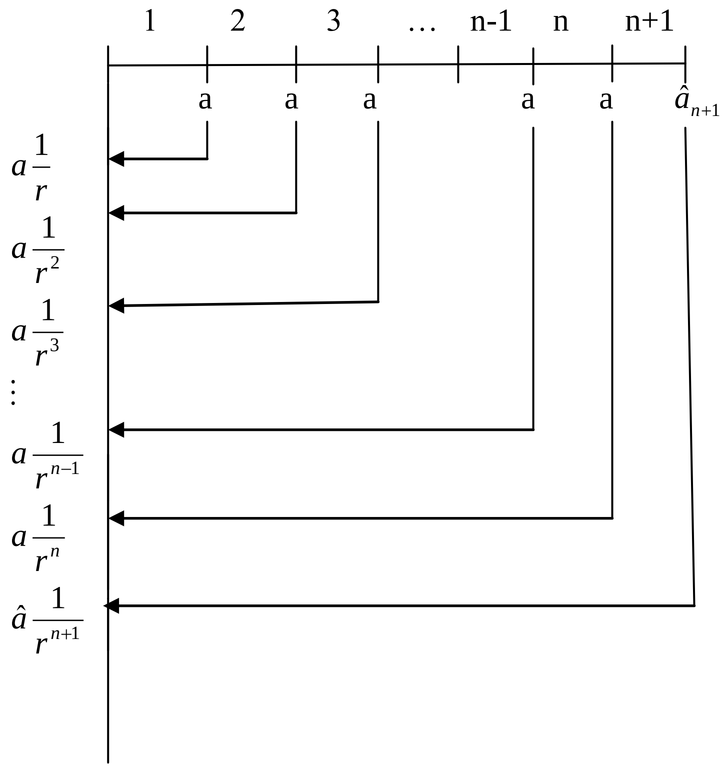
$$\hat{a}_5 = R_5 + I_5 = 2.801,44 + 420,22 = 3.221,66.$$

To znači da će poduzeće 4 godine otplaćivati po 80.000,00 kn, a krajem pete godine još nepotpuni anuitet od 3.221,66 kn.

Otplatna tablica:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				230.000,00
1	80.000,00	34.500,00	45.500,00	184.500,00
2	80.000,00	27.675,00	52.325,00	132.175,00
3	80.000,00	19.826,25	60.173,75	72.001,25
4	80.000,00	10.800,19	69.199,81	2.801,44
5	3.221,66	420,22	2.801,44	0,00
$\sum$	323.221,66	93.221,66	230.000,00	

U nastavku ćemo pokazati kako se dolazi do izraza za krnji ili nepotpuni anuitet.



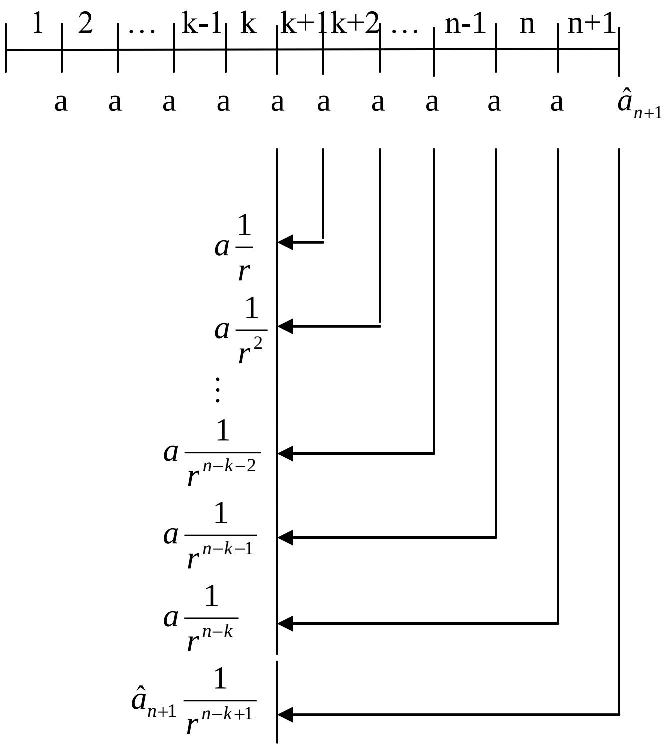
$$C_0 = a\frac{1}{r} + a\frac{1}{r^2} + a\frac{1}{r^3} + ... + a\frac{1}{r^n} + \hat{a}\frac{1}{r^{n+1}}$$

$$\hat{a}\frac{1}{r^{n+1}} = C_0 - (a\frac{1}{r} + a\frac{1}{r^2} + a\frac{1}{r^3} + ... + a\frac{1}{r^n})$$

$$\hat{a} = C_0 \cdot r^{n+1} - (ar^n + ar^{n-1} + ar^{n-2} + ... + ar)$$

$$\boxed{\hat{a}_{n+1} = C_0 \cdot r^{n+1} - ar\frac{r^n - 1}{r - 1}}$$

Ostatak duga na kraju k-tog razdoblja C_k odredit ćemo uz pomoć grafičkog prikaza i načela ekvivalencije kapitala kako slijedi:



$$C_k = a\frac{1}{r} + a\frac{1}{r^2} + a\frac{1}{r^3} + ... + a\frac{1}{r^{n-k}} + \hat{a}_{n+1}\frac{1}{r^{n-k+1}}$$

Prvih n-k članova gornjeg izraza čine geometrijski niz u kojem je prvi član jednak $\frac{a}{r}$, a omjer između susjednih članova jednak je $\frac{1}{r}$ pa se gornji izraz može zapisati kao:

$$\boxed{C_k = a\frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k}(r-1)} + \hat{a}_{n+1}\frac{1}{r^{n-k+1}}} \qquad \text{ili} \qquad \boxed{C_k = a \cdot IV_p^{n-k} + \hat{a}_{n+1} \cdot II_p^{n-k+1}}.$$

7.3 Model otplate zajma promjenjivim anuitetima (dekurzivno)

Model otplate zajma promjenjivim anuitetom najčešće se upotrebljava kada korisnik zajma procijeni, očekujući efekte budućeg poslovanja, da će mu taj model otplate odgovarati.

a) jednake otplatne kvote

Ukoliko su otplatne kvote jednake slijedi da je visina otplatne kvote jednaka n-tom dijelu zajma tj.:

$$n \cdot R = C_0 \Rightarrow R = \frac{C_o}{n}.$$

Određivanje visine otplatne kvote tada predstavlja prvi korak kod izrade otplatne tablice. Nakon toga slijedi izračun ostalih elemenata.

Primjer:

Poduzeću je odobren zajam u iznosu od 150.000,00 kn na razdoblje od 3 godine, uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata i godišnji kamatnjak 8. Zajam će se otplaćivati jednakim otplatnim kvotama, krajem godine. Izradite otplatnu tablicu.

Rješenje:

Najprije ćemo odrediti visinu otplatne kvote R:

$$R = \frac{C_0}{n} = \frac{150.000,00}{3} = 50.000,00$$

Odredimo ostale elemente otplatne tablice:

za k = 1

$$C_1 = C_0 - R = 150.000,00 - 50.000,00 = 100.000,00$$
$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{150.000,00 \cdot 8}{100} = 12.000,00$$
$$a_1 = I_1 + R = 12.000,00 + 50.000,00 = 62.000,00$$

za k = 2

$$C_2 = C_1 - R = 100.000,00 - 50.000,00 = 50.000,00$$
$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{100.000,00 \cdot 8}{100} = 8.000,00$$
$$a_2 = I_2 + R = 8.000,00 + 50.000,00 = 58.000,00$$

za k = 3 $C_3 = C_2 - R = 50.000,00 - 50.000,00 = 0$

$$I_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{50.000,00 \cdot 8}{100} = 4.000,00$$

$$a_3 = I_3 + R = 4.000,00 + 50.000,00 = 54.000,00$$

Otplatna tablica:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				150.000,00
1	62.000,00	12.000,00	50.000,00	100.000,00
2	58.000,00	8.000,00	50.000,00	50.000,00
3	54.000,00	4.000,00	50.000,00	0
$\sum$	174.000,00	24.000,00	150.000,00	

Kontrole u tijeku izrade otplatne tablice

a) Kontrola ostatka dugovanja

Kako se u modelu otplate zajma jednakim otplatnim kvotama izračunava ostatak dugovanja?

$$C_k = C_0 - (R_1 + R_2 + ... + R_k)$$

$$C_k = C_0 - kR$$

$$C_k = C_0 - k\frac{C_0}{n} = C_0(1 - \frac{k}{n})$$

$$\boxed{C_k = C_0(1 - \frac{k}{n})}$$

Primjer:

Kontrolirajte ostatak dugovanja na kraju druge godine iz prethodnog primjera.

Rješenje:

$C_0 = 150.000,00$

$k = 2$

$n = 3$

$C_2 = ?$

$$C_k = C_0(1 - \frac{k}{n})$$

$$C_2 = 150.000,00(1-\frac{2}{3}) = 50.000,00 \text{ kn}$$

b) Kontrola promjenjivog anuiteta

Krećemo od izraza za promjenjivi anuitet a_k u kojem ćemo I_k zamijeniti sa $\frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$:

$$a_k = I_k + R = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100} + R.$$

U nastavku ćemo na C_{k-1} primijeniti jednakost $C_k = C_0(1-\frac{k}{n})$, a R zamijeniti sa $\frac{C_0}{n}$ što daje novi izraz za a_k:

$$a_k = \frac{C_0(1-\frac{k-1}{n})p}{100} + \frac{C_0}{n}$$

$$a_k = \frac{C_0 \frac{n-k+1}{n} p}{100} + \frac{C_0}{n}$$

$$a_k = \frac{\frac{C_0}{n}(n-k+1)p}{100} + \frac{C_0}{n}$$

Izlučimo li zajednički faktor $\frac{C_0}{n}$ iz gornjega izraza dobit ćemo pojednostavljeni izraz za k-ti anuitet a_k:

$$\boxed{a_k = \frac{C_0}{n}\left[(n-k+1)\frac{p}{100} + 1\right]} \qquad \text{(k=1,2,…,n).}$$

Primjer:

Kontrolirajte anuitet na kraju druge godine iz prethodnog primjera.

Rješenje:

$C_0 = 150.000,00$
$k = 2$
$n = 3$

$a_2 = ?$

$$a_k = \frac{C_0}{n}\left[(n-k+1)\frac{p}{100}+1\right] = \frac{150.000,00}{3}\left[(3-2+1)\frac{8}{100}+1\right] = 58.000,00 \text{ kn}$$

c) Kontrola zadnje otplatne kvote

Zadnja otplatna kvota jednaka je predzadnjem ostatku duga.

Kontrola nakon izrade otplatne tablice

a) Zbroj otplatnih kvota jednak je iznosu zajma:

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = C_0$$

Kako se ovdje radi o jednakim otplatnim kvotama, vrijedi sljedeća jednakost:

$n \cdot R = C_0$.

b) Zbroj anuiteta jednak je zbroju kamata i otplatnih kvota:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} I_k + \sum_{k=1}^{n} R_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = \frac{C_0 \cdot p}{100} + \frac{C_1 \cdot p}{100} + \ldots + \frac{C_{n-1} \cdot p}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \underbrace{\frac{C_0 \cdot p}{100} + \frac{(C_c - R) \cdot p}{100} + \ldots + \frac{(C_0 - (n-1)R)\,p}{100}}_{\text{zbroj } n \text{ članova aritmetičkog niza}}$$

Ukupne kamate jednake su zbroju članova aritmetičkog niza S_n koji se određuje uz pomoć prvog člana aritmetičkog niza a_1 i zadnjeg člana aritmetičkog niza a_n, tj.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad \text{gdje je } a_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100}, \text{ a} \qquad a_n = \left[C_0 - (n-1)R\right] \cdot \frac{p}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{\frac{C_0 \cdot p}{100} + \left[C_0 - (n-1)R\right]\frac{p}{100}}{2} \cdot n \text{ iz čega slijedi:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{n \cdot p}{200}\left[C_0 + (C_0 - (n-1) \cdot R)\right] = \frac{n \cdot p}{200}\left[C_0 - nR + R\right].$$

Ako u gornjem izrazu zamijenimo R sa $\frac{C_0}{n}$, pojednostavit će se izraz za zbroj kamata:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{n \cdot p}{200}\left[2C_0 - n\frac{C_0}{n} + \frac{C_0}{n}\right] = \frac{n \cdot p}{200}\left[C_0 + \frac{C_0}{n}\right] = \frac{n \cdot p \cdot C_0}{200} + \frac{p \cdot C_0}{200} = \frac{C_0 \cdot p}{200}(n+1)$$

tj. dobiti konačan oblik:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{C_0 \cdot p}{200}(n+1)}.$$

Uvrstimo li taj novi izraz za zbroj kamata u izraz za zbroj anuiteta $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} I_k + \sum_{k=1}^{n} R_k$, dobit ćemo:

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{C_0 \cdot p}{200}(n+1) + C_0$, što pojednostavljeno daje:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = C_0\left[\frac{p \cdot (n+1)}{200} + 1\right]}.$$

Gornji izraz nam omogućuje izračun ukupnih anuiteta uz pomoć iznosa zajma, kamatnjaka i vremena.

Primjer:

Banka je poduzeću odobrila zajam u iznosu od 120.000,00 kn na razdoblje od 3 godine uz 8 % godišnjih dekurzivnih kamata i plaćanje jednakim otplatnim kvotama krajem polugodišta. Obračun kamata je složen i polugodišnji. Izradite otplatnu tablicu.

Rješenje:

Kako je kamatnjak godišnji, a ukamaćivanje je polugodišnje, najprije ćemo odrediti polugodišnji konformni kamatnjak.

p(G) = 8
m = 2

$$p^{'}(P) = 100\left[(1 + \frac{p(G)}{100})^{\frac{1}{m}} - 1\right] = 100\left[(1 + \frac{8}{100})^{\frac{1}{2}} - 1\right] = 3{,}92304845$$

r' = $1+\frac{p'(P)}{100}=1{,}0392304845$

Kako vrijeme otplate zajma i obračuna kamata mora biti u istim jedinicama, vrijeme ćemo izraziti u polugodištima:

n = 3 godine = 6 polugodišta.

Otplatne kvote su jednake i iznose:

$$R=\frac{C_0}{n}=\frac{120.000{,}00}{6}=20.000{,}00.$$

Kamate, anuitet i ostatak duga po godinama izračunat ćemo u nastavku:

za k = 1
$$I_1=\frac{C_0\cdot p_k}{100}=\frac{120.000{,}00\cdot 3{,}92304845}{100}=4.707{,}66$$
$$a_1=I_1+R=4.707{,}66+20.000{,}00=24.707{,}66$$
$$C_1=C_0-R=120.000{,}00-20.000{,}00=100.000{,}00$$

za k = 2
$$I_2=\frac{C_1\cdot p_k}{100}=\frac{100.000{,}00\cdot 3{,}92304845}{100}=3.923{,}05$$
$$a_2=I_2+R=3.923{,}05+20.000{,}00=23.923{,}05$$
$$C_2=C_1-R=100.000{,}00-20.000{,}00=80.000{,}00$$

za k = 3
$$I_3=\frac{C_2\cdot p_k}{100}=\frac{80.000{,}00\cdot 3{,}92304845}{100}=3.138{,}44$$
$$a_3=I_3+R=3.138{,}44+20.000{,}00=23.138{,}44$$
$$C_3=C_2-R=80.000{,}00-20.000{,}00=60.000{,}00$$

za k = 4
$$I_4=\frac{C_3\cdot p_k}{100}=\frac{60.000{,}00\cdot 3{,}92304845}{100}=2.353{,}83$$
$$a_4=I_4+R=2.353{,}83+20.000{,}00=22.353{,}83$$
$$C_4=C_3-R=60.000{,}00-20.000{,}00=40.000{,}00$$

za k = 5
$$I_5=\frac{C_4\cdot p_k}{100}=\frac{40.000{,}00\cdot 3{,}92304845}{100}=1.569{,}22$$
$$a_5=I_5+R=1.569{,}22+20.000{,}00=21.569{,}22$$
$$C_5=C_4-R=40.000{,}00-20.000{,}00=20.000{,}00$$

za k = 6
$$I_6=\frac{C_5\cdot p_k}{100}=\frac{20.000{,}00\cdot 3{,}92304845}{100}=784{,}61$$
$$a_6=I_6+R=784{,}61+20.000{,}00=20.784{,}61$$
$$C_6=C_5-R=20.000{,}00-20.000{,}00=0$$

Otplatna tablica:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				120.000,00
1	24.707,66	4.707,66	20.000,00	100.000,00
2	23.923,05	3.923,05	20.000,00	80.000,00
3	23.138,44	3.138,44	20.000,00	60.000,00
4	22.353,83	2.353,83	20.000,00	40.000,00
5	21.569,22	1.569,22	20.000,00	20.000,00
6	20.784,61	784,61	20.000,00	0
$\sum$	136.476,81	16.476,81	120.000,00	

b) Promjenjive otplatne kvote

U nastavku ćemo prikazati kako odrediti otplatne kvote i izraditi otplatnu osnovu ukoliko se radi o modelu otplate zajma promjenjivim anuitetima i otplatnim kvotama koje čine neki aritmetički niz, a dekurzivni kamatnjak je stalan.

Ako su otplatne kvote članovi aritmetičkog niza tada se opći član može zapisati, koristeći izraz za opći član aritmetičkog niza $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, kao:

$$R_k = R_1 + (k-1) \cdot d$$

Zbrojimo li sve otplatne kvote dobit ćemo iznos zajma C_0 koji se, koristeći izraz za zbroj n članova aritmetičkog niza $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_2)$, može zapisati kao:

$$C_0 = \frac{n}{2}\left[R_1 + R_1 + (n-1) \cdot d\right] = \frac{n}{2}\left[2R_1 + (n-1) \cdot d\right]$$

$$\boxed{C_0 = \frac{n}{2}\left[2R_1 + (n-1) \cdot d\right]}.$$

Iz gornjeg se izraza može izraziti d kako slijedi:

$$C_0 = \frac{n}{2}2R_1 + \frac{n}{2}(n-1)d$$

$$C_0 - nR_1 = \frac{n}{2}(n-1)d \quad \Big| \cdot \frac{2}{n(n-1)}$$

$$\boxed{d = 2\frac{C_0 - nR_1}{n(n-1)}}.$$

Ako se dobiveni izraz za razliku uvrsti u izraz za opći član aritmetičkog niza dobije se

$$R_k = R_1 + 2\cdot(k-1)\frac{C_0 - nR_1}{n(n-1)}.$$

Iz gornjeg se izraza ne može odrediti otplatna kvota R_k sve dok je nepoznata prva otplatna kvota R_1. Izbor prve otplatne kvote[7] može se obaviti tako da se procijeni iznos prvoga promjenjivog anuiteta a_1 i zatim odredi R_1 preko poznatog izraza:

$$R_1 = a_1 - \frac{C_0\cdot p}{100} \text{ i uz ograničenje } R_1 \in (0, \frac{2\cdot C_0}{n}).$$

Primjer:

Odredite otplatne kvote za zajam u visini od 100.000,00 kn koji će se vraćati 5 godina uz 10 % dekurzivnih kamata i plaćanje promjenjivih anuiteta krajem godine. Otplatne kvote čine aritmetički niz, a iznos prvoga godišnjeg anuiteta procijenjen je na 20.000,00 kn. Izradite otplatnu tablicu.

Rješenje:

$C_0 = 100.000{,}00$ kn
n = 5 g
$a_1 = 20.000{,}00$ kn
p = 10

$R_k = ?$ k = 1, 2, 3, 4, 5

$$R_1 = a_1 - \frac{C_0\cdot p}{100} = 20.000{,}00 - \frac{100.000{,}00\cdot 10}{100} = 10.000{,}00 \text{ kn}$$

Neophodna je provjera je li prva otplatna kvota R_1 iz intervala $(0, \frac{2\cdot C_0}{n})$:

$R_1 = 10.000{,}00 \in (0, \frac{2\cdot 100.000{,}00}{5}) = (0{,}40.000{,}00)$.

Nakon provjere koja je pokazala da je ograničenje na iznos prve otplatne kvote zadovoljeno, odredit ćemo razliku d kako bismo odredili iznose ostalih otplatnih kvota.

$$d = 2\frac{C_0 - nR_1}{n(n-1)} = 2\frac{100.000.00 - 5\cdot 10.000{,}00}{5\cdot 4} = 5.000{,}00$$

Kako je prva otplatna kvota R_1 = 10.000,00 kn, a razlika d = 5.000,00, slijedi da su vrijednosti ostalih otplatnih kvota, redom: $R_2 = 15.000{,}00$ kn, $R_3 = 20.000{,}00$ kn, $R_4 = 25.000{,}00$ kn i $R_5 = 30.000{,}00$ kn.

Nastavljamo s izračunavanjem svih preostalih elemenata otplatne tablice:

---

[7] Vidjeti Relić, 2002., str. 231.

za k = 1 $$C_1 = C_0 - R_1 = 100.000,00 - 10.000,00 = 90.000,00$$
$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{100.000,00 \cdot 10}{100} = 10.000,00$$
$$a_1 = I_1 + R_1 = 10.000,00 + 10.000,00 = 20.000,00$$

za k = 2 $$C_2 = C_1 - R_2 = 90.000,00 - 15.000,00 = 75.000,00$$
$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{90.000,00 \cdot 10}{100} = 9.000,00$$
$$a_2 = I_2 + R_2 = 9.000,00 + 15.000,00 = 24.000,00$$

za k = 3 $$C_3 = C_2 - R_3 = 75.000,00 - 20.000,00 = 55.000,00$$
$$I_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{75.000,00 \cdot 10}{100} = 7.500,00$$
$$a_3 = I_3 + R_3 = 7.500,00 + 20.000,00 = 27.500,00$$

za k = 4 $$C_4 = C_3 - R_4 = 55.000,00 - 25.000,00 = 30.000,00$$
$$I_4 = \frac{C_3 \cdot p}{100} = \frac{55.000,00 \cdot 10}{100} = 5.500,00$$
$$a_4 = I_4 + R_4 = 5.500,00 + 25.000,00 = 30.000,00$$

za k = 5 $$C_5 = C_4 - R_5 = 30.000,00 - 30.000,00 = 0$$
$$I_5 = \frac{C_4 \cdot p}{100} = \frac{30.000,00 \cdot 10}{100} = 3.000,00$$
$$a_5 = I_5 + R_5 = 3.000,00 + 30.000,00 = 33.000,00$$

Otplatna tablica:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				100.000,00
1	20.000,00	10.000,00	10.000,00	90.000,00
2	24.000,00	9.000,00	15.000,00	75.000,00
3	27.500,00	7.500,00	20.000,00	55.000,00
4	30.500,00	5.500,00	25.000,00	30.000,00
5	33.000,00	3.000,00	30.000,00	0
$\sum$	135.000,00	35.000,00	100.000,00	

1.Kontrole u tijeku izrade otplatne tablice

a) *Kontrola ostatka dugovanja*

Želimo li provjeriti točnost izrade otplatne tablice u stupcu Ostatak dugovanja, krećemo od jednakosti koja govori o tome da je ostatak dugovanja na kraju k-tog razdoblja jednak iznosu zajma umanjenom za k otplatnih kvota koje su otplaćene do toga razdoblja:

$$C_k = C_0 - (R_1 + R_2 + ... + R_k).$$

U gornjem je izrazu zagrada jednaka zbroju n članova aritmetičkog niza pa ga možemo zapisati kao

$$C_k = C_0 - \frac{k}{2}(R_1 + R_k) = C_0 - \frac{k}{2}\left(R_1 + \overbrace{R_1 + \frac{2(C_0 - n \cdot R_1)(k-1)}{n(n-1)}}^{R_k} \right)$$

$$C_k = C_0 - k\left(\frac{1}{2}2R_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2(C_0 - n \cdot R_1)(k-1)}{n(n-1)} \right)$$

$$C_k = C_0 - k\left(R_1 + \frac{(C_0 - n \cdot R_1)(k-1)}{n(n-1)} \right)$$

Gornji se izraz može pojednostaviti ukoliko uvedemo zamjenu $d = 2\frac{C_0 - nR_1}{n(n-1)}$:

$$C_k = C_0 - k\left(R_1 + \overbrace{\frac{C_0 - n \cdot R_1}{n(n-1)}}^{\frac{d}{2}}(k-1) \right)$$ i konačno slijedi

$$C_k = C_0 - k\left(R_1 + \frac{d}{2}(k-1) \right).$$

Dakle, ostatak dugovanja krajem k-tog razdoblja gornjim se izrazom može odrediti ako znamo iznos zajma, iznos prve otplatne kvote i razliku između otplatnih kvota.

Primjer:

Provjerite ostatak dugovanja iz prethodnog primjera na kraju treće godine ako je iznos zajma 100.000,00 kn, otplatna kvota na kraju prve godine iznosi 10.000,00 kn, a zajam će se vraćati 5 godina.

Rješenje:

$C_0 = 100.000{,}00 \text{ kn}$
n = 5 g
p(G) = 10

$C_3 = ?$

$$C_k = C_0 - k\left(R_1 + \frac{d}{2}(k-1)\right) \qquad d = 2\frac{C_0 - nR_1}{n(n-1)} = 2\frac{100.000.00 - 5\cdot 10.000,00}{5\cdot 4} = 5.000,00$$

$$C_3 = 100.000,00 - 3(10.000,00 + \frac{5.000,00}{2}\cdot 2) = 55.000,00 \text{ kn}$$

Ostatak dugovanja na kraju treće godine u iznosu od 55.000,00 odgovara iznosu koji je za to razdoblje upisan u otplatnu tablicu.

b) *Kontrola promjenjivog anuiteta*

Krećemo od definicije anuiteta na kraju k-tog razdoblja sadržane u izrazu $a_k = I_k + R_k$ u koji uvodimo zamjenu za kamate na kraju k-tog razdoblja $I_k = C_{k-1}\cdot\frac{p}{100}$ tj.

$$I_k = \left\{\overbrace{C_0 - (k-1)\left[R_1 + \frac{C_0 - n\cdot R_1}{n(n-1)}(k-2)\right]}^{C_{k-1}}\right\}\cdot\frac{p}{100} \quad \text{i} \quad R_k = R_1 + 2\cdot(k-1)\frac{C_0 - nR_1}{n(n-1)}$$

pa se sada promjenjivi anuitet može izraziti kao

$$a_k = I_k + R_k = \left\{\overbrace{C_0 - (k-1)\left[R_1 + \frac{C_0 - n\cdot R_1}{n(n-1)}(k-2)\right]}^{C_{k-1}}\right\}\cdot\frac{p}{100} + R_1 + 2\cdot(k-1)\frac{C_0 - nR_1}{n(n-1)}$$

Ako se u gornji izraz uvedu zamjene $d = 2\frac{C_0 - nR_1}{n(n-1)}$ i $\overbrace{C_0\cdot\frac{p}{100}}^{I_1} = a_1 - R_1$ nakon sređivanja dobije se izraz za promjenjivi anuitet na kraju k-tog razdoblja:

$$a_k = a_1 + (k-1)\left[d - (R_1 + \frac{k-2}{2}d)\frac{p}{100}\right].$$

Primjer:

Ako je iznos zajma 100.000,00 kn, n = 5 godina, otplatna kvota na kraju prvog razdoblja 10.000,00 kn, anuitet na kraju prve godine 20.000,00 kn, a p(G) = 10, koliki je anuitet na kraju pete godine?

Rješenje:

$$d = 2\frac{C_0 - nR_1}{n(n-1)} = 2\frac{100.000,00 - 5\cdot 10.000,00}{5\cdot 4} = 5.000,00$$

$$a_k = a_1 + (k-1)\left[d - (R_1 + \frac{k-2}{2} d)\frac{p}{100} \right] =$$

$$= 20.000{,}00 + (5-1)\left[5.000{,}00 - (10.000{,}00 + \frac{5-2}{2} 5.000{,}00)\frac{10}{100} \right]$$

$$= 20.000{,}00 + 4\left[5.000{,}00 - (10.000{,}00 + 7.500{,}00)0.1\right] = 33.000{,}00 \text{ kn}$$

Ako pogledamo prethodnu otplatnu tablicu, vidjet ćemo da je taj iznos upisan kao anuitet na kraju pete godine.

2. Kontrole nakon izrade otplatne tablice

Nakon izrade otplatne tablice slijede kontrole:

- zbroja otplatnih kvota koji mora biti jednak iznosu zajma, tj.
  $$\sum_{k=1}^{n} R_k = C$$
- zbroja kamata i otplatnih kvota koji mora biti jednak zbroju anuiteta, tj.
  $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} I_k + \sum_{k=1}^{n} R_k$$

7.4 Konverzija zajma (dekurzivno)

U tijeku otplate zajma može nastupiti situacija u kojoj se od strane zajmodavca ili zajmoprimca traže promjene jednoga ili više elemenata iz ugovora koji su potpisali. Svaka takva promjena naziva se *konverzija zajma*. Tada se određuje novi iznos anuiteta koji se izračunava na temelju ostatka dugovanja u razdoblju kada je nastupila jedna ili više promjena. Da bismo prikazali kako se u takvim slučajevima postupa, krenut ćemo od uobičajenih oznaka, a zatim ćemo prijeći na primjere.

C_0	iznos zajma
$(a_k)_1$	iznos anuiteta u k-tom razdoblju uz prvobitne uvjete
n_1	broj godina otplaćivanja zajma kako je ugovoreno
p_1	dekurzivni kamatnjak koji je ugovoren
u	razdoblje u kojemu su se promijenili prvobitni uvjeti
C_u	ostatak dugovanja u razdoblju u
$(a_k)_2$	novi iznos anuiteta u k-tom razdoblju
n_2	broj razdoblja otplate novog zajma
p_2	dekurzivni kamatnjak nakon promjene

Postupak konverzije zajma odvija se u sljedećim koracima[8]:

1) odrediti ostatak dugovanja u razdoblju kada dolazi do promjene

[8] Detalje vidjeti u Relić, 2002., str. 239.

2) odrediti iznose novih anuiteta.

Primjer:

Poduzeće je otplaćivalo banci zajam u iznosu od 200.000,00 kn jednakim anuitetima 3 godine kada je zapalo u financijske poteškoće pa se obratilo banci sa zamolbom da umjesto ugovorenih 5 godina zajam otplaćuje 6 godina. Dekurzivni kamatnjak iznosi 12. Koliki su bili iznosi anuiteta prve tri godine, a koliko iznose nakon produženja roka otplate zajma? Izradite otplatnu tablicu!

Rješenje:

$C_0 = 200.000,00$ kn
$n_1 = 5$
$p_1(G) = 12$
$r_1 = 1,12$

$(a_k)_1 = ?$
$(a_k)_2 = ?$

Najprije ćemo odrediti iznose anuiteta za prve tri godine:

$$a_k = a = C_0 \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} \Rightarrow (a_k)_1 = (a)_1 = C \frac{r_1^{n_1}(r_1 - 1)}{r_1^{n_1} - 1}$$

$$(a_k)_1 = (a)_1 = 200.000,00 \frac{1,12^5(1,12-1)}{1,12^5 - 1} = 55.481,95 \text{ kn}$$

Poduzeće je prve tri godine plaćalo na kraju godine 55.481,95 kn anuiteta.

Da bismo odredili iznos anuiteta nakon produženja roka otplate, moramo najprije odrediti ostatak dugovanja nakon tri godine.

$$C_k = a \frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k}(r-1)} \quad \text{iz čega slijedi } C_u = a \frac{r_1^{n_1-u} - 1}{r_1^{n_1-u}(r_1 - 1)} \text{, tj.}$$

$$C_3 = 55.481,95 \frac{1,12^{5-3} - 1}{1,12^{5-3}(1,12-1)} = 93.767,33 \text{ kn.}$$

Dobiveni iznos predstavlja ostatak dugovanja na kraju treće godine i jednak je iznosu novog zajma. Sada ćemo odrediti iznos novih anuiteta:

$C_u = C_3 = 93.767,33$
$n_2 = 3$
$p_2 = 12$
$r_2 = 1,12$

$(a_k)_2$ =?

$$a_k = a = C_0 \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} \Rightarrow (a_k)_2 = (a)_2 = C_u \frac{r_2^{n_2}(r_2 - 1)}{r_2^{n_2} - 1}$$

$$(a_k)_2 = (a)_2 = 93.767{,}33 \frac{1.12^3(1{,}12-1)}{1{,}12^3 - 1} = 39.039{,}93 \,\text{kn}$$

Otplatna tablica:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				200.000,00
1	55.481,95	24.000,00	31.481,95	168.518,05
2	55.481,95	20.222,17	35.259,78	133.258,27
3	55.481,95	15.991,01	39.490,94	93.767,33
4	39.039,93	11.252,08	27.787,85	65.979,48
5	39.039,93	7.917,54	31.122,39	34.857,09
6	39.039,93	4.182,84	34.857,09	0
$\sum$	283.565,64	83.565,64	200.000,00	

Primjer:

Poduzeće je 2 godine otplaćivalo zajam u iznosu od 250.000,00 kn odobren na 4 godine uz 20 % dekurzivnih kamata i plaćanjem anuiteta krajem godine po modelu jednakih otplatnih kvota. Nakon druge godine banka je snizila kamatnjak na 15. Izradite otplatnu tablicu.

Rješenje:

C_0 = 250.000,00 kn

$n_1 = 4$

$p_1(G) = 20$

$r_1 = 1{,}20$

Najprije ćemo odrediti iznos otplatnih kvota:

$$(R)_1 = \frac{250.000{,}00}{4} = 62.500{,}00 \,\text{kn}$$

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate I_k	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0				250.000,00
1	112.500,00	50.000,00	62.500,00	187.500,00
2	100.000,00	37.500,00	62.500,00	125.000,00
3	81.250,00	18.750,00	62.500,00	62.500,00
4	71.875,00	9.375,00	62.500,00	0
$\sum$	365.625,00	115.625,00	250.000,00	

Prve dvije godine otplatne kvote iznosile su 62.500,00 kn jer se ukupan iznos zajma od 250.000,00 dijelio na 4 godine. Nakon toga se ostatak dugovanja na kraju druge godine u iznosu od 125.000,00 dijelio na 2 godine, što je dalo isti iznos otplatnih kvota i u sljedeće dvije godine.

Nastavljamo s prikazom modela otplate zajma uz anticipativni obračun kamata.

7.5 Model otplate zajma jednakim anuitetima (anticipativno)

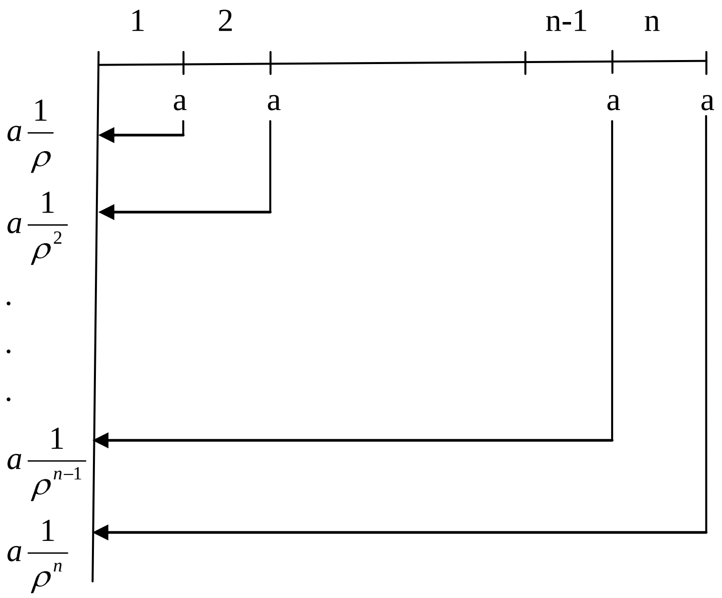
Kako odrediti jednake anuitete koji dospijevaju krajem razdoblja ako je zajam odobren na rok od n godina, a obračun kamata je složen i anticipativan?

C = C_0	iznos zajma
n	broj godina
q(G)	godišnji, anticipativni kamatnjak
$\bar{I}_k$	složene kamate u k-tom razdoblju

Kako se radi o anticipativnom ukamaćivanju, prvi je korak obračun kamata na odobreni zajam. Nakon toga se dobiveni iznos kamata odbija od odobrenog zajma:

$$C_0 - \bar{I}_0 = C_0 - \frac{C_0 \cdot q(G)}{100} = C_0\left(1 - \frac{q(G)}{100}\right) = C_0 \frac{100 - q(G)}{100} = C_0 \cdot \frac{1}{\frac{100}{100 - q(G)}} = C_0 \cdot \frac{1}{\rho}.$$

Budući da anuiteti dospijevaju krajem godine, koristeći načelo ekvivalencije, dolazimo do sljedećeg grafičkog prikaza:



$$C_0 \cdot \frac{1}{\rho} = a \cdot \frac{1}{\rho} + a \cdot \frac{1}{\rho^2} + ... + a \cdot \frac{1}{\rho^n}$$

Desna strana gornje jednakosti zbroj je n članova geometrijskog niza, čiji je prvi član $a \cdot \frac{1}{\rho}$, a omjer između dva susjedna člana $\frac{1}{\rho}$. Koristeći izraz za zbroj n članova geometrijskog niza, dobijemo sljedeći izraz:

$$C_0 \frac{1}{\rho} = a \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)^n - 1}{\frac{1}{\rho} - 1} = a \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\frac{1}{\rho^n} - 1}{\frac{1-\rho}{\rho}} = a \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\frac{1-\rho^n}{\rho^n}}{\frac{1-\rho}{\rho}} = a \cdot \frac{1-\rho^n}{\rho^n (1-\rho)}$$

$$C_0 \frac{1}{\rho} = a \cdot \frac{1-\rho^n}{\rho^n (1-\rho)}$$

Pomnožimo li gornju jednakost sa ρ, dobije se izraz za zajam:

$$C_0 = a \cdot \frac{-(\rho^n - 1)}{-\rho^{-1} \rho^n (\rho - 1)} = a \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1} (\rho - 1)}$$

$$\boxed{C_0 = a \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1} (\rho - 1)}}.$$

Iz gornje jednakosti slijedi izraz za anuitet:

$$\boxed{a = C_0 \frac{\rho^{n-1}(\rho - 1)}{\rho^n - 1}}.$$

Pomoću financijskih tablica zajam i anuitet mogu se izraziti kako slijedi:

$\boxed{C_0 = a\left(IV_q^{n-1} + 1\right)}$ $\boxed{a = C_0 \cdot VI_q^n}$ gdje je $\boxed{VI_q^n = \frac{1}{IV_q^{n-1} + 1}}$.

Primjer:

Izračunajte godišnji anuitet za otplatu zajma odobrenog na 3 godine u iznosu od 25.000,00 kn i godišnji kamatnjak 20. Banka primjenjuje složen, godišnji i anticipativni obračun kamata. Izradite otplatnu tablicu.

Rješenje:

C_0 = 25.000,00 kn
n = 3 g
q(G) = 20

---

a = ?
q(G) = 20

$$\rho = \frac{100}{100 - q(G)} = \frac{100}{100 - 20} = 1{,}25$$

$$a = C_0 \frac{\rho^{n-1}(\rho - 1)}{\rho^n - 1} = 25.000{,}00 \frac{1{,}25^{3-1}(1{,}25 - 1)}{1{,}25^3 - 1} \approx 10.245{,}90 \text{ kn}$$

Izrada otplatne tablice sastoji se od sljedećih koraka:

a) u nulto razdoblje upiše se iznos kamata i iznos zajma
b) unosi se jednaki iznos anuiteta od prvog do n-tog razdoblja
c) upisuju se otplatne kvote, kamate i ostatak dugovanja za svako od n razdoblja.

a) $\bar{I}_0 = \frac{C \cdot q(G)}{100} = \frac{25.000{,}00 \cdot 20}{100} = 5.000{,}00$ C_0 = 25.000,00
b) a = 10.245,90

c) Otplatne kvote: $R_k = (a - I_0) \cdot \rho^k$ za k = 1, 2, 3

$$R_1 = (a - I_0) \cdot \rho^1 = (10.245{,}90 - 5.000{,}00) \cdot 1{,}25 = 6.557{,}38$$
$$R_2 = (a - I_0) \cdot \rho^2 = (10.245{,}90 - 5.000{,}00) \cdot 1{,}25^2 = 8.196{,}72$$
$$R_3 = (a - I_0) \cdot \rho^3 = (10.245{,}90 - 5.000{,}00) \cdot 1{,}25^3 = 10.245{,}90$$

Kamate: $\bar{I}_k = a - R_k$ za k = 1, 2, 3

$\bar{I}_1 = a - R_1 = 10.245,90 - 6.557,38 = 3.688,52$
$\bar{I}_2 = a - R_2 = 10.245,90 - 8.196,72 = 2.049,18$
$\bar{I}_3 = a - R_3 = 10.245,90 - 10.245,90 = 0$

Ostatak dugovanja: $C_k = C_{k-1} - R_k$ za k = 1, 2, 3

$C_1 = C_{1-1} - R_1 = 25.000,00 - 6.557,38 = 18.442,62$
$C_2 = C_{2-1} - R_2 = 18.442,62 - 8.196,72 = 10.245.90$
$C_3 = C_{3-1} - R_3 = 10.245,90 - 10.245,90 = 0$

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate $\bar{I}_k$	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0		5.000,00		25.000,00
1	10.245,90	3.688,52	6.557,38	18.442,62
2	10.245,90	2.049,18	8.196,72	10.245,90
3	10.245,90	0	10.245,90	0
$\sum$	30.737,70	5.737,70	25.000,00	

U nastavku ćemo prikazati dvije vrste kontrole izrade otplatne tablice: kontrola u tijeku izrade i kontrola nakon izrade.

1)Kontrola u tijeku izrade otplatne tablice

U tijeku izrade otplatne tablice možemo kontrolirati otplatne kvote, kamate i ostatak dugovanja. Najprije ćemo se zadržati na prikazu kontrole otplatnih kvota.

a) *Kontrola otplatnih kvota*

Da bismo došli do izraza za otplatne kvote općenito, tj. u ovisnosti o razdoblju n, izrazit ćemo otplatne kvote za prvo, drugo i treće razdoblje. Krenut ćemo od izraza za anuitet i kamate:

$$a = \bar{I}_1 + R_1 \qquad \bar{I}_1 = \frac{C_1 \cdot q(G)}{100} = \frac{(C_0 - R_1) \cdot q}{100}.$$

Ako sada u izraz za anuitet uvrstimo gornji izraz za kamate, dobit ćemo anuitet izražen pomoću kamata nultog razdoblja, kamatnjaka i otplatne kvote prvog razdoblja:

$$a = \frac{C_0 q}{100} - \frac{R_1 q}{100} + R_1 = \bar{I}_0 + \left(1 - \frac{q}{100}\right) R_1 \text{ , tj:}$$
$$a = \bar{I}_0 + \left(1 - \frac{q}{100}\right) R_1 .$$

Sada možemo izraziti otplatnu kvotu prvoga razdoblja R_1 kako slijedi:

$$\left(1-\frac{q}{100}\right)R_1 = a-\bar{I}_0$$

$$R_1 = \frac{a-\bar{I}_0}{1-\frac{q}{100}} = \frac{a-\bar{I}_0}{\frac{100-q}{100}} = (a-\bar{I}_0)\frac{100}{100-q} = R_0\cdot\rho, \quad \text{tj.}$$

$$R_1 = R_0\cdot\rho$$

Nastavit ćemo sa izražavanjem otplatne kvote drugoga razdoblja R_1 :

$$a = \bar{I}_2 + R_2 \qquad \bar{I}_2 = \frac{C_2\cdot q(G)}{100} = \frac{(C_0-R_1-R_2)\cdot q}{100}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{(C_0-R_1-R_2)\cdot q}{100}$$

Zamijenimo li izraz za kamate u izrazu za anuitet slijedi:

$$a = \frac{(C_0-R_1-R_2)\cdot q}{100} + R_2 = \frac{(C_0-R_1)\cdot q}{100} - \frac{R_2\cdot q}{100} + R_2 \quad \text{tj.}$$

$a = \frac{(C_0-R_1)\cdot q}{100} - \frac{R_2\cdot q}{100} + R_2$ iz čega nakon zamjene $\frac{(C_0-R_1)\cdot q}{100} = \bar{I}_1 = a - R_1$ slijedi

$$a = a - R_1 - R_2\left(\frac{q}{100}+1\right) = a - R_1 + R_2\left(1-\frac{q}{100}\right)$$

$a = a - R_1 + R_2\left(1-\frac{q}{100}\right)$ iz čega slijedi izraz za otplatnu kvotu drugog razdoblja

$R_2\left(1-\frac{q}{100}\right) = a - a + R_1 = R_1,$ odnosno

$$R_2 = \frac{R_1}{1-\frac{q}{100}} = \frac{R_1}{\frac{100-q}{100}} = \frac{R_1}{\frac{1}{\rho}} = R_1\cdot\rho,$$

tj. $R_2 = R_1\cdot\rho$.

Analogno prethodnim koracima dolazimo do izraza za otplatnu kvotu trećeg razdoblja:

$$R_3 = R_2\cdot\rho.$$

Zaključujemo da se općenito *otplatna kvota k-tog razdoblja* može izraziti:

$$\boxed{R_k = R_{k-1} \cdot \rho}.$$

Ispišemo li prvih nekoliko otplatnih kvota R_1, R_2, R_3 ... a zatim ih izrazimo preko prve otplatne kvote, dobit ćemo geometrijski niz:

$$R_1,\ R_1 \cdot \rho,\ R_1 \cdot \rho^2 \dots$$

čiji je prvi član jednak R_1, a omjer ρ, pa je *otplatna kvota k-tog razdoblja* R_k jednaka općem članu geometrijskog niza $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ za n = k, tj.

$$\boxed{R_k = R_1 \cdot \rho^{k-1}}.$$

Izrazimo li iz gornje jednakosti otplatnu kvotu prvog razdoblja R_1 preko anuiteta i kamata dobijemo:

$$\boxed{R_k = (a - \bar{I}_0)\rho^k}.$$

Gornja jednakost služi kao izraz za određivanje i kontrolu otplatnih kvota. Ako se koristimo financijskim tablicama, tada je odgovarajući izraz

$$\boxed{R_k = (a - \bar{I}_0)I_q^k}.$$

Primjer:

Provjerite je li točno određena vrijednost otplatne kvote trećeg razdoblja iz prethodnog primjera.

Rješenje:

$$R_3 = (a - \bar{I}_0)\rho^3 = (10.245{,}90 - 5.000{,}00)1{,}25^3 = 10.245{,}90 \text{ kn}$$

Vrijednost otplatne kvote trećeg razdoblja je točno određena.

b) *Kontrola kamata*

Kontrola kamata može se provesti koristeći poznati izraz za kamate na kraju k-tog razdoblja

$$\bar{I}_k = \frac{C_k \cdot q}{100}.$$

c) *Kontrola ostatka dugovanja*

Na kraju svakog razdoblja treba otplatiti još ostatak dugovanja, za što je potrebno još n-k anuiteta, što vodi izrazu za anuitet:

$\boxed{a = C_k \dfrac{\rho^{n-k-1} \cdot (\rho - 1)}{\rho^{n-k} - 1}}$ ili uz pomoć financijskih tablica $\boxed{a = C_k \cdot VI_q^n}$.

Iz gornjeg izraza slijedi odgovarajući izraz za ostatak dugovanja na kraju k-tog razdoblja:

$\boxed{C_k = a \dfrac{\rho^{n-k} - 1}{\rho^{n-k-1}(\rho - 1)}}$ ili uz pomoć financijskih tablica $\boxed{C_k = a \cdot (VI_q^{n-k-1} + 1)}$.

Također vrijedi da je ostatak dugovanja u predzadnjem razdoblju jednak zadnjoj otplatnoj kvoti, odnosno anuitetu:

$C_{n-1} = R_n = a$.

2) Kontrola otplatne tablice nakon njezine izrade

a) *Iznos zajma jednak je zbroju otplatnih kvota*:

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = C_0$$

b) *Zbroj anuiteta jednak je zbroju kamata i otplatnih kvota*:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{I}_k + \sum_{k=1}^{n} R_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Prethodni izraz može se zapisati na drugi način:

$\sum_{k=1}^{n} \bar{I}_k + C_0 = n \cdot a$ budući da se radi o modelu otplate zajma jednakim anuitetima.

7.6 Model otplate zajma unaprijed dogovorenim jednakim anuitetima (anticipativno)

Često se poduzeća koja se banci obrate za zajam, koriste modelom u kojemu se anuiteti unaprijed dogovaraju. Naime, takav je model otplate zajma prihvatljiviji ukoliko se može procijeniti iznos koji bi poduzeće moglo otplaćivati u budućem razdoblju. Navedeni model otplate zajma prikazat ćemo na sljedećem primjeru.

Primjer:

Poduzeću je potreban zajam i procijenilo je da bi ga moglo otplaćivati anuitetima u visini od 80.000,00 kn krajem godine. Ako bi iznos zajma iznosio 300.000,00 kn, a fiksni godišnji kamatnjak q = 20, koliko bi trajala otplata zajma i kako bi izgledala otplatna tablica?

Rješenje:

$C_0 = 300.000{,}00 \text{ kn}$
a = 80.000,00 kn
q(G) = 20

$$\rho = \frac{100}{100 - q(G)} = \frac{100}{100 - 20} = 1{,}25$$

za k = 0
$$R_0 = 0$$
$$C_0 = 300.000{,}00$$
$$\bar{I}_0 = \frac{C_0 \cdot q}{100} = \frac{300.000{,}00 \cdot 20}{100} = 60.000{,}00$$

za k = 1
$$R_1 = (a - \bar{I}_0)\rho = (80.000{,}00 - 60.000{,}00)1{,}25 = 25.000{,}00$$
$$C_1 = C_0 - R_1 = 300.000{,}00 - 25.000{,}00 = 275.000{,}00$$
$$\bar{I}_1 = \frac{C_1 \cdot q}{100} = \frac{275.000{,}00 \cdot 20}{100} = 55.000{,}00$$

za k = 2
$$R_2 = (a - \bar{I}_0)\rho^2 = (80.000{,}00 - 60.000{,}00)1{,}25^2 = 31.250{,}00$$
$$C_2 = C_1 - R_2 = 275.000{,}00 - 31.250{,}00 = 243.750{,}00$$
$$\bar{I}_2 = \frac{C_2 \cdot q}{100} = \frac{243.750{,}00 \cdot 20}{100} = 48.750{,}00$$

za k = 3
$$R_3 = (a - \bar{I}_0)\rho^3 = (80.000{,}00 - 60.000{,}00)1{,}25^3 = 39.062{,}50$$
$$C_3 = C_2 - R_3 = 243.750{,}00 - 39.062{,}50 = 204.687{,}50$$
$$\bar{I}_3 = \frac{C_3 \cdot q}{100} = \frac{204.687{,}50 \cdot 20}{100} = 40.937{,}50$$

za k = 4
$$R_4 = (a - \bar{I}_0)\rho^4 = (80.000{,}00 - 60.000{,}00)1{,}25^4 = 48.828{,}13$$
$$C_4 = C_3 - R_4 = 204.687{,}50 - 48.828{,}13 = 155.859{,}37$$
$$\bar{I}_4 = \frac{C_4 \cdot q}{100} = \frac{155.859{,}37 \cdot 20}{100} = 31.171{,}87$$

za k = 5
$$R_5 = (a - \bar{I}_0)\rho^5 = (80.000{,}00 - 60.000{,}00)1{,}25^5 = 61.035{,}16$$
$$C_5 = C_4 - R_5 = 155.859{,}37 - 61.035{,}16 = 94.824{,}21$$
$$\bar{I}_5 = \frac{C_5 \cdot q}{100} = \frac{94.824{,}21 \cdot 20}{100} = 18.964{,}84$$

za k = 6
$$R_6 = (a - \bar{I}_0)\rho^6 = (80.000{,}00 - 60.000{,}00)1{,}25^6 = 76.293{,}95$$
$$C_6 = C_5 - R_6 = 94.824{,}21 - 76.293{,}95 = 18.530{,}26$$

$$\bar{I}_6 = \frac{C_6 \cdot q}{100} = \frac{18.530{,}26 \cdot 20}{100} = 3.706{,}05$$

Budući da je ostatak dugovanja $C_6 = 18.530{,}26$ manji od dogovorenog iznosa anuiteta a = 80.000,00, na kraju sedme godine otplatit će se to dugovanje uvećano za iznos kamata. Zadnji anuitet neće biti jednak ostalim anuitetima, pa ga nazivamo krnji ili nepotpuni anuitet $\hat{a}_4$, a njegov je iznos jednak zadnjoj otplatnoj kvoti.

Otplatna tablica:

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet $a_k = a$	Kamate $\bar{I}_k$	Otplatna kvota R_k	Ostatak dugovanja C_k
0		60.000,00		300.000,00
1	80.000,00	55.000,00	25.000,00	275.000,00
2	80.000,00	48.750,00	31.250,00	243.750,00
3	80.000,00	40.937,50	39.062,50	204.687,50
4	80.000,00	31.171,87	48.828,13	155.859,37
5	80.000,00	18.964,84	61.035,16	94.824,21
6	80.000,00	3.706,05	76.293,95	18.530,26
7	18.530,26		18.530,26	0
$\sum$	498.530,26	198.530,26	300.000,00	

U prethodnom primjeru odredili smo vrijeme otplate zajma uspoređujući anuitet i ostatak dugovanja. Vrijeme otplate se međutim može odrediti i pomoću jednakosti za zajam, kako slijedi:

$$C_0 = a\frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho - 1)} \Bigg| \frac{\rho - 1}{a \cdot \rho}$$

$$\frac{C_0(\rho - 1)}{a\rho} = \frac{\rho^n - 1}{\rho^n}$$

$$\frac{C_0(\rho - 1)}{a\rho} = 1 - \frac{1}{\rho^n}$$

$$\frac{1}{\rho^n} = 1 - \frac{C_0(\rho - 1)}{a\rho}$$

$$\frac{1}{\rho^n} = \frac{a\rho - C_0(\rho - 1)}{a\rho}$$

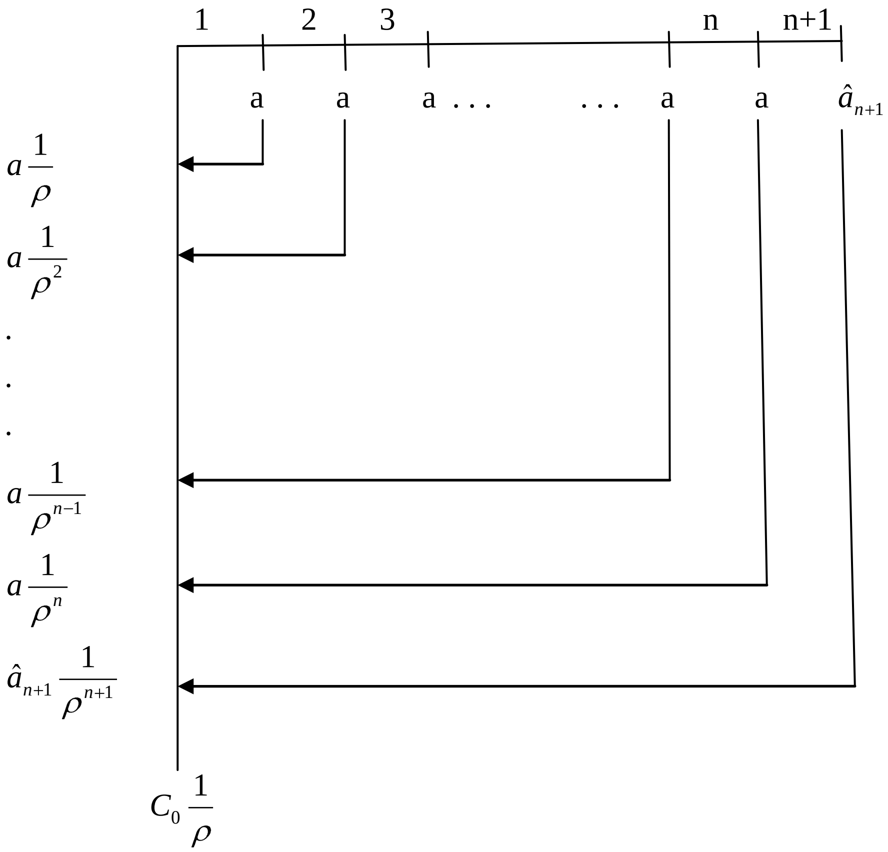
$$\rho^n = \frac{a\rho}{a\rho - C_0(\rho - 1)}$$

Gornji se izraz, uvođenjem odgovarajućih zamjena[9], može svesti na

$$\boxed{n=\frac{\log a-\log(a-\bar{I}_0)}{\log\rho}}.$$

U nastavku ćemo prikazati kako odrediti nepotpuni anuitet uz pomoć načela ekvivalencije kapitala.

Grafički prikaz navedenog problema:



$$C_0\frac{1}{\rho}=a\frac{1}{\rho}+a\frac{1}{\rho^2}+a\frac{1}{\rho^3}+...+a\frac{1}{\rho^n}+\hat{a}_{n+1}\frac{1}{\rho^{n+1}}$$

$$\hat{a}_{n+1}\frac{1}{\rho^{n+1}}=C_0\frac{1}{\rho}-(a\frac{1}{\rho}+a\frac{1}{\rho^2}+a\frac{1}{\rho^3}+...+a\frac{1}{\rho^n})\Big|\rho^{n+1}$$

$$\hat{a}_{n+1}=C_0\rho^n-a(\rho^n+\rho^{n-1}+\rho^{n-2}+...+\rho^2+\rho)$$

U zagradi gornje jednakosti nalazi se zbroj n članova geometrijskog niza, pa je sada nepotpuni anuitet $\hat{a}_{n+1}$ jednak slijedećoj razlici:

---

[9] vidjeti Relić, 2002., str. 264.

$$\boxed{\hat{a}_{n+1} = C_0\rho^n - a\rho\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}}$$

Ukoliko koristimo financijske tablice, nepotpuni anuitet $\hat{a}_{n+1}$ jednak je slijedećoj razlici:

$$\boxed{\hat{a}_{n+1} = C_0 I_q^n - aIII_q^n}.$$

Efektivni kamatnjak

Efektivni kamatnjak je kamatnjak koji pokazuje koliko odobreni zajam zaista košta klijenta. On odražava sve troškove zajma koji osim kamatnjaka sadrži i naknade, osiguranje i ostale troškove zajma[10]. Tek otkada banke imaju obvezu iskazivanja efektivnog kamatnjaka, klijenti mogu procijeniti cijenu kredita. U Odluci o efektivnoj kamatnoj stopi kreditnih institucija i kreditnih unija te ugovaranju usluga s potrošačima Hrvatske narodne banke od veljače 2010. godine navodi se:

„Efektivna kamatna stopa (EKS) je dekurzivna kamatna stopa iskazana na godišnjoj razini primjenom složenog kamatnog računa primjenom koje se diskontirani novčani primici izjednačuju s diskontiranim novčanim izdacima koji se odnose na dane kredite odnosno primljene depozite. Kod kredita ta je stopa dodatno prilagođena jednokratnim ekvivalentom utjecaja diskontiranih novčanih primitaka i izdataka po osnovi novčanog pologa koji služi za osiguranje naplate kredita. Pri diskontiranju primjenjuje se stvarni (kalendarski) broj dana u mjesecu i 365/366 dana u godini. EKS se iskazuje s dvjema decimalama, uz zaokruživanje druge decimale“.

Metodologija izračuna efektivne kamatne stope također je predmet navedene Odluke HNB i propisana je Uputom za primjenu Odluke o efektivnoj kamatnoj stopi kreditnih institucija i kreditnih unija te ugovaranju usluga s potrošačima. Način izračuna EKS je jedinstven i temelji se na matematičkom načelu koje kaže da je EKS jednaka razlici između zbroja konačnih vrijednosti uplata davatelju kredita i zbroja početnih vrijednosti isplata korisniku kredita (deponentu), iskazanoj na godišnjoj razini kao postotak od zbroja početnih vrijednosti isplata korisniku kredita (deponentu). Efektivna kamatna stopa p_e predstavlja rješenje sljedeće jednadžbe:

$$\sum_k \left[NNT_k \left(1 + \frac{p_e}{100}\right)^{-\frac{d_k}{t}} \right] = 0 \quad \text{gdje je}$$

NNT_k neto novčani tijek (neto uplata davatelju kredita) tijekom k-tog dana,

d_k broj dana koji je protekao od nultog dana do promatranog novčanog tijeka na k-ti dan

t broj dana u godini.

---

[10] Postoje 4 metode izračuna efektivnog kamatnjaka: aktuarska, direktna, konstantna i N metoda. U našoj zemlji Hrvatska narodna banka zadužena je za određivanje metode izračuna efektivnog kamatnjaka koje su banke dužne primijeniti.

Šego (2008.) upozorava na složenost metodologije na koju za izračun EKS upućuje HNB te zaključuje kako se tom metodologijom ne može uvijek izračunati stvarna cijena kredita budući da se može dogoditi da rješenje gornje jednadžbe nije jedinstveno[11].
Iz navedenih razloga ovdje se nećemo upuštati u izračunavanje EKS na praktičnom primjeru.

8. OCJENE FINANCIJSKE EFIKASNOSTI INVESTICIJSKOG PROJEKTA

U praksi se često donose procjene prihvatljivosti nekoga investicijskog projekta. Da bi se mogla donijeti konačna odluka o tome potrebno je procijeniti ulaganja kao i njihove posljedice tj. efekte na materijalnu osnovu poduzeća. Zapravo, razmatraju se ulaganja i povrati sredstava uz određene tržišne uvjete. Da bi ocjena investicijskog projekta bila što je moguće realnija, neki autori[12] predlažu da se ocjena sastoji od:

1) financijske (tržišne) ocjene projekta

2) društveno-ekonomske ocjene projekta

3) ocjene neizvjesnosti projekta

4) usporedne ocjene projekta

Zadržat ćemo se na financijskoj, odnosno tržišnoj ocjeni projekta. Najprije ćemo uvesti neke nove pojmove koji će nam omogućiti razradu kriterija ocjene financijske efikasnosti investicijskog projekta:

a_j neto efekt (razlika primitka i izdatka) u svakom razdoblju ekonomskog vijeka trajanja investicijskog projekta

n ekonomski vijek trajanja investicijskog projekta

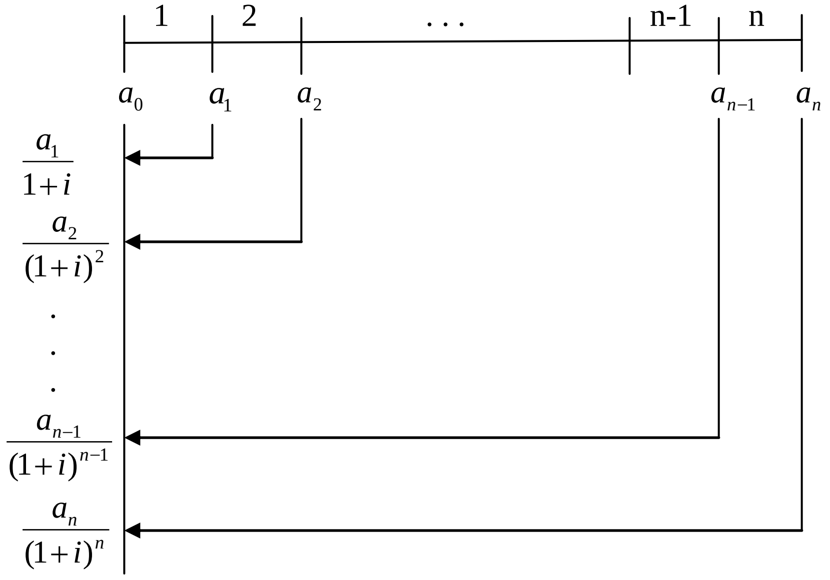
i kalkulativna stopa

Da bismo odredili sadašnje vrijednosti neto efekata koji se očekuju tijekom trajanja projekta, koristit ćemo sljedeći grafički prikaz:

---

[11] Detaljnije vidjeti u B. Šego, Financijska matematika, str. 352. – 358.

[12] Relić, 2002., str. 269.



Sadašnja vrijednost neto efekata $\frac{a_n}{(1+i)^n}$ jednaka je $\frac{a_n}{r^n}$ zato što vrijede jednakosti: $r = 1 + \frac{p(G)}{100}$ te $i = \frac{p(G)}{100}$.

Dakle, vrijednost investicijskog projekta (koja ovisi o kalkulativnoj stopi *i*) sada možemo odrediti kao zbroj svih sadašnjih vrijednosti neto efekata:

$$S^{(0)}(i) = a_0 + \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{a_n}{(1+i)^n} = \frac{a_0}{(1+i)^0} + \frac{a_1}{(1+j)^1} + \frac{a_2}{(1+j)^2} + ... + \frac{a_n}{(1+i)^n}$$

$$\boxed{S^{(0)}(i) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{(1+i)^j} = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j}}$$

Prikažemo li vrijednost investicijskog projekta u obliku funkcije dekurzivnog kamatnog faktora gornji se izraz mijenja u

$$\boxed{S^{(0)}(i) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{(1+i)^j} = \sum_{j=0}^{n} a_j r^{-j} = S^{(0)}(r)}.$$

Razmotrimo vrijednosti neto efekata u projektu:

za j = 0, tj. na početku ekonomskog vijeka trajanja projekta vrijedi: $a_j = -U_j$,
gdje je U_j ulaganje u projekt na kraju j-te godine:

za j = 1, 2, 3, …, n-1 vrijedi: $a_j = -U_j + P_j - I_j$
gdje su: P_j primitak na kraju j – te godine, I_j izdatak na kraju godine

za j = n vrijedi: $a_j = P_j - I_j + R_j$ gdje je R_j rezidualna vrijednost na kraju n–te godine[13].

Nastavit ćemo s prikazom kriterija ocjene financijske efikasnosti investicijskog projekta:

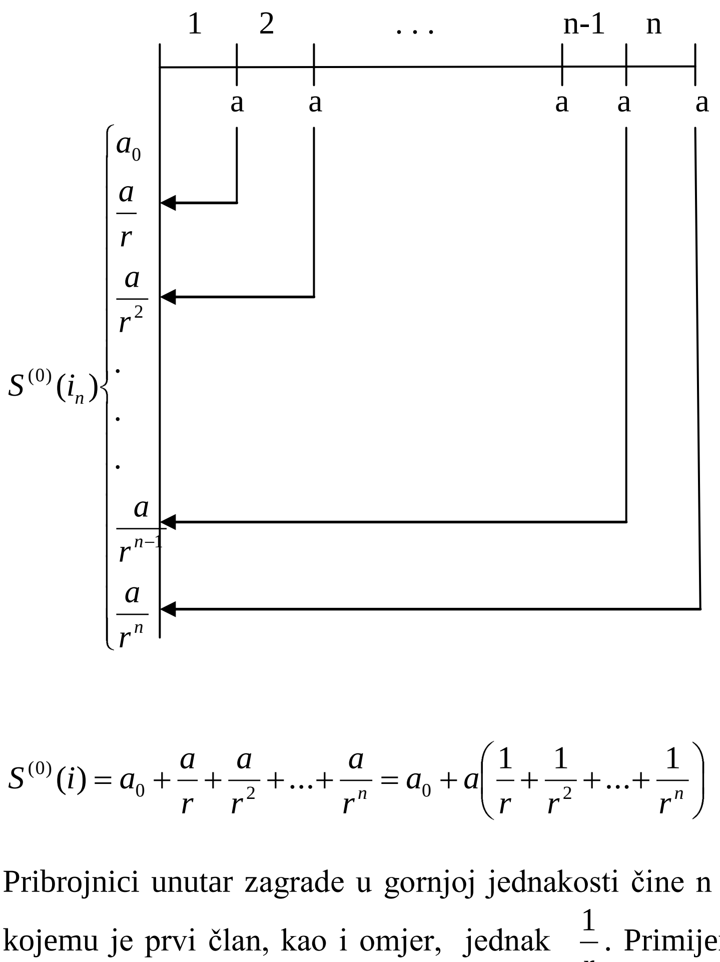
1) neto sadašnja vrijednost

2) interna stopa profitabilnosti

3) vrijeme (rok) povrata sredstava

8.1 Neto sadašnja vrijednost

Ukoliko je na početku trajanja projekta izvršeno samo jedno ulaganje, a svi su efekti pozitivni i konstantne vrijednosti, tada je neto sadašnju vrijednost projekta moguće odrediti, uz pomoć grafičkog prikaza, na sljedeći način:



$$S^{(0)}(i) = a_0 + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \ldots + \frac{a}{r^n} = a_0 + a\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n}\right)$$

Pribrojnici unutar zagrade u gornjoj jednakosti čine n članova geometrijskog niza u kojemu je prvi član, kao i omjer, jednak $\frac{1}{r}$. Primijenimo li izraz za zbroj prvih n članova geometrijskog niza, dobit ćemo sljedeću jednakost:

[13] radi se o vrijednosti realne imovine na kraju vijeka investicijskog projekta

$$S^{(0)}(i)=a_0+a\frac{1}{r}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\frac{1}{r}-1}=a_0+a\frac{\frac{1}{r^n}-1}{r\frac{1-r}{r}}=a_0+a\frac{\frac{1-r^n}{r^n}}{1-r}=a_0+a\frac{-(r^n-1)}{-r^n(r-1)}=a_0+a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}$$

tj.

$$\boxed{S^{(0)}(i)=a_0+a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}}.$$

Za neki investicijski projekt procjenjujemo da je:

1) efikasan ako je $S^{(0)}(i_u)$ > 0

2) neutralan ako je $S^{(0)}(i_u)$ = 0

3) neefikasan ako je $S^{(0)}(i_u)$ < 0.

Realnost i uporabnost procjene financijske efikasnosti investicijskog projekta ovise o tome koliko smo dobro predvidjeli visinu kalkulativne stope, odnosno vremenske preferencije novca.

Primjer:

Za neki investicijski projekt predviđaju se sljedeći novčani tijekovi:

120.000,00 kn	neto efekt na početku vijeka trajanja
25.000,00 kn	neto efekt na kraju prve godine
38.000,00	neto efekt na kraju druge godine
40.000,00	neto efekt na kraju treće godine
35.000,00	neto efekt na kraju četvrte godine
26.000,00	neto efekt na kraju pete godine.

Primjenom neto sadašnje vrijednosti ocijenite financijsku efikasnost investicijskog projekta čiji je vijek trajanja 5 godina, a kalkulativna stopa i_u = 8 %.

Rješenje:

$a_0=-120.000,00$
$a_1=25.000,00$
$a_2=38.000,00$
$a_3=40.000,00$
$a_4=35.000,00$

$a_5 = 26.000,00$
$n = 5$
$i_u = 8\%$

$$S^{(0)}(i_u) = a_0 + \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \frac{a_3}{(1+i)^3} + \frac{a_4}{(1+i)^4} + \frac{a_5}{(1+i)^5}$$

$$S^{(0)}(i_u) = -120.000,00 + \frac{25.000,00}{1+0,08} + \frac{38.000,00}{(1+0,08)^2} + \frac{40.000,00}{(1+0,08)^3} + \frac{35.000,00}{(1+0,08)^4} + \frac{26.000,00}{(1+0,008)^5}$$

$$S^{(0)}(i_u) = \frac{-120.000,00 \cdot 1,08^5 + 25.000,00 \cdot 1,08^4 + 38.000,00 \cdot 1,08^3 + 40.000,00 \cdot 1,08^2}{1,08^5} +$$

$$+ \frac{35.000,00 \cdot 1,08 + 26.000,00}{1,08^5} = 10.901,52$$

Budući da je $S^{(0)}(i_u) > 0$ zaključujemo da je investicijski projekt efikasan.

Ako se radi o ocjeni kapitalnih projekata u inozemstvu, neophodno je prikupiti dodatne informacije koje mogu utjecati na gotovinski tijek. Tada se savjetuje korištenje metode ***prilagođene neto sadašnje vrijednosti*** koja se sastoji od sljedećih koraka[14]:

1. procijeniti neto sadašnju vrijednost projekta u domaćoj valuti

2. procijenjene tijekove novca diskontirati stopom koja predstavlja rizik

3.vrijednost gotovinskih tijekova preračunati u izvještajnu valutu prema odgovarajućem tečaju

4. proračunati eventualne koristi od korištenja kreditnog financiranja

5. u proračun uvrstiti koristi i troškove tipa subvencionirane kamate i sl.

8.2 Interna stopa profitabilnosti

Interna stopa profitabilnosti i_R je stopa uz koju je neto sadašnja vrijednost investicijskog projekta jednaka 0. Dakle, radi se o specifičnoj stopi.

Da bismo mogli dati ocjenu efikasnosti investicijskog projekta, potrebno je usporediti neku unaprijed zadanu stopu i_D(koja može biti kamatna stopa ili stopa profitabilnosti

[14] detaljne upute o tome kako provesti navedene korake vidjeti u Vidučić Lj., 2006.

za slične projekte u nekoj djelatnosti i sl.) s internom stopom profitabilnosti. Moguća su tri slučaja:

ako je $i_R > i_D$, zaključujemo da je investicijski projekt efikasan

ako vrijedi $i_R = i_D$, zaključujemo da je investicijski projekt neutralan

ukoliko je $i_R < i_D$, zaključujemo da je investicijski projekt neefikasan.

Kod izračunavanja interne stope profitabilnosti i_R koristimo se nekom od iterativnih metoda ili primijenimo linearnu interpolaciju za određivanje njezine približne vrijednosti.
Neka vrijedi:

$$x_1 = i_1 \qquad y_1 = S^{(0)}(i_1) > 0$$

$$x = i_R \qquad y = S^{(0)}(i_R) = 0$$

$$x_2 = i_2 \qquad y_2 = S^{(0)}(i_2) < 0$$

Koristeći jednadžbu pravca kroz dvije točke $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, nakon uvrštenja gornjih jednakosti, dobijemo sljedeću jednakost:

$$0 - S^{(0)}(i_1) = \frac{S^{(0)}(i_2) - S^{(0)}(i_1)}{i_2 - i_1}(i_R - i_1) \quad \Big| \cdot (i_2 - i_1)$$

$$-S^{(0)}(i_1)(i_2 - i_1) = (S^{(0)}(i_2) - S^{(0)}(i_1))(i_R - i_1)$$

$$-S^{(0)}(i_1)(i_2 - i_1) = S^{(0)}(i_2) \cdot i_R - S^{(0)}(i_1) i_R - S^{(0)}(i_2) i_1 + S^{(0)}(i_1) \cdot i_1$$

$$(S^{(0)}(i_2) - S^{(0)}(i_1)) i_1 - S^{(0)}(i_1)(i_2 - i_1) = i_R (S^{(0)}(i_2) - S^{(0)}(i_1))$$

$$i_R = \frac{(S^{(0)}(i_2) - S^{(0)}(i_1)) \cdot i_1}{(S^{(0)}(i_2) - S^{(0)}(i_1))} - \frac{S^{(0)}(i_1)(i_2 - i_1)}{(S^{(0)}(i_2) - S^{(0)}(i_1))}$$

$$i_R = i_1 - \frac{S^{(0)}(i_1)(i_2 - i_1)}{-(S^{(0)}(i_1) - S^{(0)}(i_2))}$$

$$\boxed{i_R = i_1 + \frac{S^{(0)}(i_1)(i_2 - i_1)}{S^{(0)}(i_1) - S^{(0)}(i_2)}}$$

Primjer:

Za prethodni primjer ocijenite financijsku efikasnost investicijskog projekta koristeći kriterij interne stope profitabilnosti, ako je i_D = 0,06.

Rješenje:

$$S^{(0)}(i) = -120.000,00 + \frac{25.000,00}{1+i} + \frac{38.000,00}{(1+i)^2} + \frac{40.000,00}{(1+i)^3} + \frac{35.000,00}{(1+i)^4} + \frac{26.000,00}{(1+i)^5}$$

Slijedi rješavanje jednadžbe $S^{(0)}(i_R) = 0$
Linearnom aproksimacijom odredit ćemo približnu vrijednost od i_R. Prvi je korak odabir neke i_1 za koju je $S^{(0)}(i_1) > 0$ i neke i_2 za koju je $S^{(0)}(i_2) < 0$.

Ako postavimo vrijednost i_1 =0,1 tada slijedi:

$$S^{(0)}(0,1) = -120.000,00 + \frac{25.000,00}{1+0,1} + \frac{38.000,00}{(1+0,1)^2} + \frac{40.000,00}{(1+0,1)^3} + \frac{35.000,00}{(1+0,1)^4} + \frac{26.000,00}{(1+0,1)^5}$$

$$= 4.234,24 > 0$$

Ako postavimo vrijednost i_2 =0,6 tada slijedi:

$$S^{(0)}(0,6) = -120.000,00 + \frac{25.000,00}{1+0,6} + \frac{38.000,00}{(1+0,6)^2} + \frac{40.000,00}{(1+0,6)^3} + \frac{35.000,00}{(1+0,6)^4} + \frac{26.000,00}{(1+0,6)^5}$$

$$= -71.945,49 < 0.$$

Sljedeći korak sastoji se u određivanju interne stope profitabilnosti i_R:

$i_1 = 0,1$ $\quad$ $S^{(0)}(0,1) = 4.234,24$

$i_R = ?$ $\quad$ $S^{(0)}(i_R) = 0$

$i_2 = 0,6$ $\quad$ $S^{(0)}(0,6) = -71.945,49$

Uvrstimo li odgovarajuće vrijednosti u izraz za i_R, dobit ćemo:

$$i_R = i_1 + \frac{S^{(0)}(i_1)(i_2 - i_1)}{S^{(0)}(i_1) - S^{(0)}(i_2)} = 0,1 + \frac{4.234,24(0,6-0,1)}{4.234,24 + 71.945,49} = 0,127791.$$

Budući da je $i_R > i_D$, zaključujemo da je investicijski projekt efikasan.

Karakteristika ove metode ocjene financijskog projekta je da se radi o stopi, a ne o apsolutnim vrijednostima, pa se može dogoditi da se ne uzima u obzir efekt baze na koju se izračunava stopa. Nadalje, ukoliko gotovinski tijekovi nisu konstantni, izračunavanje stope bez računala postaje naporno.
Usporedba metode neto sadašnje vrijednosti i interne stope profitabilnosti teoretski daje prednost metodi neto sadašnje vrijednosti, iako se u praksi više koristi interna stopa profitabilnosti[15].

8.3 Vrijeme povrata sredstava

Vrijeme povrata sredstava definira se kao vrijeme koje je potrebno za povrat svih ulaganja, a određuje se izrazom:

$$\boxed{S^{(0)}(t) = \sum_{j=0}^{T(i_u)} a_j (1+i_u)^{-j} = 0}$$

gdje je:

$S^{(0)}(t)$	funkcija vremena
a_j	neto efekt u projektu na kraju j-te godine
i_u	zadana kalkulativna stopa
$T(i_u)$	vrijeme povrata sredstava kao funkcija kalkulativne stope.

Za neko unaprijed zadano vrijeme povrata sličnih projekata t_m, neki investicijski projekt je:

a) prihvatljiv, ako je $T(i_u) < t_m$

b) neutralan, ako je $T(i_u) = t_m$

c) neprihvatljiv, ako je $T(i_u) > t_m$.

Postupak određivanja vremena povrata sredstava odvija se u sljedećim koracima:

1) Određujemo sume $S^{(0)}(t)$ za t = 0, 1, 2 ..., sve dok ne odredimo onu vrijednost za t za koju vrijede sljedeće nejednakosti:

$S^{(0)}(t) < 0$ i $S^{(0)}(t+1) \geq 0$.

2) Zaključujemo da je vrijeme povrata sredstava unutar interval <t,t+1>.

3) Odredimo vrijeme povrata sredstava pomoću izraza:

$$T(i_u) = t + \frac{S^{(0)}(t)}{S^{(0)}(t) - S^{(0)}(t+1)}.$$

[15] za detalje vidjeti Vidučić Lj., 2006.

Primjer:

Procijenite financijsku efikasnost investicijskog projekta iz prethodnog primjera uz vrijeme povrata sličnih projekata $t_m = 4$ g i kalkulativnu stopu $i_u = 0{,}08$.

Rješenje:

$$S^{(0)}(t) = \sum_{j=0}^{T(i_u)} a_j (1+i_u)^{-j} = 0$$

$$S^{(0)}(0) = a_0 = -120.000{,}00$$

$$S^{(0)}(1) = a_0 + \frac{a_1}{1{,}08} = -120.000{,}00 + \frac{25.000{,}00}{1{,}08} = -96.851{,}85$$

$$S^{(0)}(2) = a_0 + \frac{a_1}{1{,}08} + \frac{a_2}{1{,}08^2} = -120.000{,}00 + \frac{25.000{,}00}{1{,}08} + \frac{38.000{,}00}{1{,}08^2} = -64.272{,}97$$

$$S^{(0)}(3) = a_0 + \frac{a_1}{1{,}08} + \frac{a_2}{1{,}08^2} + \frac{a_3}{1{,}08^3} = -120.000{,}00 + \frac{25.000{,}00}{1{,}08} + \frac{38.000{,}00}{1{,}08^2} + \frac{40.000{,}00}{1{,}08^3} =$$

$$S^{(0)}(3) = -32.519{,}68$$

$$S^{(0)}(4) = a_0 + \frac{a_1}{1{,}08} + \frac{a_2}{1{,}08^2} + \frac{a_3}{1{,}08^3} + \frac{a_4}{1{,}08^4} = -120.000{,}00 + \frac{25.000{,}00}{1{,}08} + \frac{38.000{,}00}{1{,}08^2} + \frac{40.000{,}00}{1{,}08^3} +$$

$$+ \frac{35.000{,}00}{1{,}08^4} = -6.793.64$$

$$S^{(0)}(5) = a_0 + \frac{a_1}{1{,}08} + \frac{a_2}{1{,}08^2} + \frac{a_3}{1{,}08^3} + \frac{a_4}{1{,}08^4} + \frac{a_5}{1{,}08^5} = -120.000{,}00 + \frac{25.000{,}00}{1{,}08} + \frac{38.000{,}00}{1{,}08^2} +$$

$$+ \frac{40.000{,}00}{1{,}08^3} + \frac{35.000{,}00}{1{,}08^4} + \frac{26.000{,}00}{1{,}08^5} = 10.901{,}52$$

Kako smo dobili pozitivnu vrijednost, zaustavljamo se i zaključujemo da je $T(i_u = 0{,}08)$ iz intervala <4,5> budući da je $S^{(0)}(4) = -6.793{,}64$ i $S^{(0)}(5) = 10.901{,}52$. Sada možemo odrediti vrijeme povrata sredstava:

$$T(0{,}08) = 4 + \frac{-6.793{,}64}{-6.793{,}64 - 10.901{,}52}$$

$$T(0{,}08) \approx 4{,}3839 \text{ godina}$$

Budući je $T(0{,}08) \approx 4{,}3839 > 4$ g $= t_m$, procjenjujemo da je investicijski projekt neprihvatljiv.

PRIMJERI KREDITA IZ PRAKSE

U nastavku ćemo prikazati stvarne primjere kredita iz jedne naše banke.

1. Primjer nenamjenskog kredita:

Otplatni plan

Korisnik:		Sigurnosni polog:	0,00
Iznos kredita u valuti:	10.000,00	Kamatna stopa pologa:	0,00%
Iznos kredita u valuti isplate:	73.900,00	Način obračuna kamate:	Proporcionalni
Valuta:	EUR	Kraj razdoblja korištenja:	27.5.2011
Valuta isplate:	HRK		
Tečaj za isplatu:	HBC - Kupovni (7,390000)	Kamatna stopa u korištenju:	0,00%
Tečaj za naplatu:	HBC - Prodajni (7,490000)	Razdoblje obračuna kamate korištenja:	Mjesečno
Rok otplate u mjesecima:	60	Kraj razdoblja moratorija:	27.5.2011
Nominalna kamatna stopa:	8,55%	Kamatna stopa u moratoriju:	0,00%
Efektivna kamatna stopa:	9,96%	Razdoblje obračuna kamate moratorija:	Mjesečno
Kamatna stopa 2:	0,00%		
Datum kamatne stope 2:		Datum izračuna:	27.5.2011
Periodičnost otplate:	Mjesečno	Datum isplate:	27.5.2011
		Datum dospijeća:	30.6.2016
Periodičnost obračuna kamate:	Mjesečno	Dan plaćanja:	31
		Anuitet u valuti:	205,41
Naknada:	1,00%	Anuitet u valuti isplate:	1.538,49
Premija osiguranja:	0,00	Anuitet u valuti 2:	0,00
		Anuitet u valuti isplate 2:	0,00

Razdoblje	Datum dospijeća	Isplata kredita	Druge isplate	Otplatna rata	Otplatna kvota	Uplata kamate	Druge uplate	Stanje kredita	Tokovi sig. pologa	
	01.06.2011	73.900,00	0,00	0,00	0,00	515,87	749,00	74.900,00	0,00	
1	31.07.2011	0,00	0,00	1.538,50	1.004,84	533,66	0,00	73.895,16	0,00	Otplata
2	31.08.2011	0,00	0,00	1.538,50	1.012,00	526,50	0,00	72.883,16	0,00	Otplata
3	30.09.2011	0,00	0,00	1.538,50	1.019,21	519,29	0,00	71.863,95	0,00	Otplata
4	31.10.2011	0,00	0,00	1.538,50	1.026,47	512,03	0,00	70.837,48	0,00	Otplata
5	30.11.2011	0,00	0,00	1.538,50	1.033,78	504,72	0,00	69.803,70	0,00	Otplata
6	31.12.2011	0,00	0,00	1.538,50	1.041,15	497,35	0,00	68.762,55	0,00	Otplata
7	31.01.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.048,57	489,93	0,00	67.713,98	0,00	Otplata
8	29.02.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.056,04	482,46	0,00	66.657,94	0,00	Otplata
9	31.03.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.063,56	474,94	0,00	65.594,38	0,00	Otplata
10	30.04.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.071,14	467,36	0,00	64.523,24	0,00	Otplata
11	31.05.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.078,77	459,73	0,00	63.444,47	0,00	Otplata
12	30.06.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.086,46	452,04	0,00	62.358,01	0,00	Otplata
13	31.07.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.094,20	444,30	0,00	61.263,81	0,00	Otplata
14	31.08.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.102,00	436,50	0,00	60.161,81	0,00	Otplata
15	30.09.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.109,85	428,65	0,00	59.051,96	0,00	Otplata
16	31.10.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.117,75	420,75	0,00	57.934,21	0,00	Otplata
17	30.11.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.125,72	412,78	0,00	56.808,49	0,00	Otplata
18	31.12.2012	0,00	0,00	1.538,50	1.133,74	404,76	0,00	55.674,75	0,00	Otplata
19	31.01.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.141,82	396,68	0,00	54.532,93	0,00	Otplata
20	28.02.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.149,95	388,55	0,00	53.382,98	0,00	Otplata
21	31.03.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.158,15	380,35	0,00	52.224,83	0,00	Otplata
22	30.04.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.166,40	372,10	0,00	51.058,43	0,00	Otplata
23	31.05.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.174,71	363,79	0,00	49.883,72	0,00	Otplata
24	30.06.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.183,08	355,42	0,00	48.700,64	0,00	Otplata
25	31.07.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.191,51	346,99	0,00	47.509,13	0,00	Otplata
26	31.08.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.200,00	338,50	0,00	46.309,13	0,00	Otplata
27	30.09.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.208,55	329,95	0,00	45.100,58	0,00	Otplata
28	31.10.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.217,16	321,34	0,00	43.883,42	0,00	Otplata
29	30.11.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.225,83	312,67	0,00	42.657,59	0,00	Otplata
30	31.12.2013	0,00	0,00	1.538,50	1.234,56	303,94	0,00	41.423,03	0,00	Otplata
31	31.01.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.243,36	295,14	0,00	40.179,67	0,00	Otplata
32	28.02.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.252,22	286,28	0,00	38.927,45	0,00	Otplata
33	31.03.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.261,14	277,36	0,00	37.666,31	0,00	Otplata
34	30.04.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.270,13	268,37	0,00	36.396,18	0,00	Otplata
35	31.05.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.279,18	259,32	0,00	35.117,00	0,00	Otplata
36	30.06.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.288,29	250,21	0,00	33.828,71	0,00	Otplata
37	31.07.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.297,47	241,03	0,00	32.531,24	0,00	Otplata
38	31.08.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.306,71	231,79	0,00	31.224,53	0,00	Otplata
39	30.09.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.316,03	222,47	0,00	29.908,50	0,00	Otplata
40	31.10.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.325,40	213,10	0,00	28.583,10	0,00	Otplata
41	30.11.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.334,85	203,65	0,00	27.248,25	0,00	Otplata

42	31.12.2014	0,00	0,00	1.538,50	1.344,36	194,14	0,00	25.903,89	0,00	Otplata
43	31.01.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.353,93	184,57	0,00	24.549,96	0,00	Otplata
44	28.02.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.363,58	174,92	0,00	23.186,38	0,00	Otplata
45	31.03.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.373,30	165,20	0,00	21.813,08	0,00	Otplata
46	30.04.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.383,08	155,42	0,00	20.430,00	0,00	Otplata
47	31.05.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.392,94	145,56	0,00	19.037,06	0,00	Otplata
48	30.06.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.402,86	135,64	0,00	17.634,20	0,00	Otplata
49	31.07.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.412,86	125,64	0,00	16.221,34	0,00	Otplata
50	31.08.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.422,92	115,58	0,00	14.798,42	0,00	Otplata
51	30.09.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.433,06	105,44	0,00	13.365,36	0,00	Otplata
52	31.10.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.443,27	95,23	0,00	11.922,09	0,00	Otplata
53	30.11.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.453,56	84,94	0,00	10.468,53	0,00	Otplata
54	31.12.2015	0,00	0,00	1.538,50	1.463,91	74,59	0,00	9.004,62	0,00	Otplata
55	31.01.2016	0,00	0,00	1.538,50	1.474,34	64,16	0,00	7.530,28	0,00	Otplata
56	29.02.2016	0,00	0,00	1.538,50	1.484,85	53,65	0,00	6.045,43	0,00	Otplata
57	31.03.2016	0,00	0,00	1.538,50	1.495,43	43,07	0,00	4.550,00	0,00	Otplata
58	30.04.2016	0,00	0,00	1.538,50	1.506,08	32,42	0,00	3.043,92	0,00	Otplata
59	31.05.2016	0,00	0,00	1.538,50	1.516,81	21,69	0,00	1.527,11	0,00	Otplata
60	30.06.2016	0,00	0,00	1.537,99	1.527,11	10,88	0,00	0,00	0,00	Otplata
		73.900,00	0,00	92.309,49	74.900,00	17.925,36	749,00		0,00	

Napomene: Iskazana efektivna kamatna stopa važeća je na datum izračuna. Pri isplati i otplati kredita te izračunu efektivne kamatne stope korišten je tečaj važeći na datum izrade otplatnog plana.

2. Primjer stambenog kredita:

Otplatni plan

Korisnik:		Sigurnosni polog:	0,00
Iznos kredita u valuti:	100.000,00	Kamatna stopa pologa:	0,00%
Iznos kredita u valuti isplate:	739.000,00	Način obračuna kamate:	Proporcionalni
Valuta:	EUR	Kraj razdoblja korištenja:	27.5.2011
Valuta isplate:	HRK		

Tečaj za isplatu:	HBC - Kupovni (7,390000)	Kamatna stopa u korištenju:	0,00%
Tečaj za naplatu:	HBC - Prodajni (7,490000)	Razdoblje obračuna kamate korištenja:	Mjesečno
Rok otplate u mjesecima:	360	Kraj razdoblja moratorija:	27.5.2011
Nominalna kamatna stopa:	5,90%	Kamatna stopa u moratoriju:	0,00%
Efektivna kamatna stopa:	6,68%	Razdoblje obračuna kamate moratorija:	Mjesečno
Kamatna stopa 2:	6,40%		
Datum kamatne stope 2:	30.6.2012	Datum izračuna:	27.5.2011
Periodičnost otplate:	Mjesečno	Datum isplate:	27.5.2011
		Datum dospijeća:	30.6.2041
Periodičnost obračuna kamate:	Mjesečno	Dan plaćanja:	31
		Anuitet u valuti:	593,14
Naknada:	0,00	Anuitet u valuti isplate:	4.442,59
Premija osiguranja:	0,00		
		Anuitet u valuti 2:	624,86
		Anuitet u valuti isplate 2:	4.680,18

Razdoblje	Datum dospijeća	Isplata kredita	Druge isplate	Otplatna rata	Otplatna kvota	Uplata kamate	Druge uplate	Stanje kredita	Tokovi sig. pologa	
	01.06.2011	739.000,00	0,00	0,00	0,00	3.559,83	0,00	749.000,00	0,00	
1	31.07.2011	0,00	0,00	4.442,60	760,02	3.682,58	0,00	748.239,98	0,00	Otplata
2	31.08.2011	0,00	0,00	4.442,60	763,75	3.678,85	0,00	747.476,23	0,00	Otplata
3	30.09.2011	0,00	0,00	4.442,60	767,51	3.675,09	0,00	746.708,72	0,00	Otplata
4	31.10.2011	0,00	0,00	4.442,60	771,28	3.671,32	0,00	745.937,44	0,00	Otplata
5	30.11.2011	0,00	0,00	4.442,60	775,07	3.667,53	0,00	745.162,37	0,00	Otplata
6	31.12.2011	0,00	0,00	4.442,60	778,89	3.663,71	0,00	744.383,48	0,00	Otplata
7	31.01.2012	0,00	0,00	4.442,60	782,71	3.659,89	0,00	743.600,77	0,00	Otplata
8	29.02.2012	0,00	0,00	4.442,60	786,56	3.656,04	0,00	742.814,21	0,00	Otplata
9	31.03.2012	0,00	0,00	4.442,60	790,43	3.652,17	0,00	742.023,78	0,00	Otplata
10	30.04.2012	0,00	0,00	4.442,60	794,32	3.648,28	0,00	741.229,46	0,00	Otplata
11	31.05.2012	0,00	0,00	4.442,60	798,22	3.644,38	0,00	740.431,24	0,00	Otplata
12	30.06.2012	0,00	0,00	4.680,18	731,21	3.948,97	0,00	739.700,03	0,00	Otplata
13	31.07.2012	0,00	0,00	4.680,18	735,11	3.945,07	0,00	738.964,92	0,00	Otplata
14	31.08.2012	0,00	0,00	4.680,18	739,03	3.941,15	0,00	738.225,89	0,00	Otplata
15	30.09.2012	0,00	0,00	4.680,18	742,98	3.937,20	0,00	737.482,91	0,00	Otplata
16	31.10.2012	0,00	0,00	4.680,18	746,94	3.933,24	0,00	736.735,97	0,00	Otplata
17	30.11.2012	0,00	0,00	4.680,18	750,92	3.929,26	0,00	735.985,05	0,00	Otplata

18	31.12.2012	0,00	0,00	4.680,18	754,93	3.925,25	0,00	735.230,12	0,00	Otplata
19	31.01.2013	0,00	0,00	4.680,18	758,95	3.921,23	0,00	734.471,17	0,00	Otplata
20	28.02.2013	0,00	0,00	4.680,18	763,00	3.917,18	0,00	733.708,17	0,00	Otplata
21	31.03.2013	0,00	0,00	4.680,18	767,07	3.913,11	0,00	732.941,10	0,00	Otplata
22	30.04.2013	0,00	0,00	4.680,18	771,16	3.909,02	0,00	732.169,94	0,00	Otplata
23	31.05.2013	0,00	0,00	4.680,18	775,27	3.904,91	0,00	731.394,67	0,00	Otplata
24	30.06.2013	0,00	0,00	4.680,18	779,41	3.900,77	0,00	730.615,26	0,00	Otplata
25	31.07.2013	0,00	0,00	4.680,18	783,57	3.896,61	0,00	729.831,69	0,00	Otplata
26	31.08.2013	0,00	0,00	4.680,18	787,74	3.892,44	0,00	729.043,95	0,00	Otplata
27	30.09.2013	0,00	0,00	4.680,18	791,95	3.888,23	0,00	728.252,00	0,00	Otplata
28	31.10.2013	0,00	0,00	4.680,18	796,17	3.884,01	0,00	727.455,83	0,00	Otplata
29	30.11.2013	0,00	0,00	4.680,18	800,42	3.879,76	0,00	726.655,41	0,00	Otplata
30	31.12.2013	0,00	0,00	4.680,18	804,68	3.875,50	0,00	725.850,73	0,00	Otplata
31	31.01.2014	0,00	0,00	4.680,18	808,98	3.871,20	0,00	725.041,75	0,00	Otplata
32	28.02.2014	0,00	0,00	4.680,18	813,29	3.866,89	0,00	724.228,46	0,00	Otplata
33	31.03.2014	0,00	0,00	4.680,18	817,63	3.862,55	0,00	723.410,83	0,00	Otplata
34	30.04.2014	0,00	0,00	4.680,18	821,99	3.858,19	0,00	722.588,84	0,00	Otplata
35	31.05.2014	0,00	0,00	4.680,18	826,37	3.853,81	0,00	721.762,47	0,00	Otplata
36	30.06.2014	0,00	0,00	4.680,18	830,78	3.849,40	0,00	720.931,69	0,00	Otplata
37	31.07.2014	0,00	0,00	4.680,18	835,21	3.844,97	0,00	720.096,48	0,00	Otplata
38	31.08.2014	0,00	0,00	4.680,18	839,67	3.840,51	0,00	719.256,81	0,00	Otplata
39	30.09.2014	0,00	0,00	4.680,18	844,14	3.836,04	0,00	718.412,67	0,00	Otplata
40	31.10.2014	0,00	0,00	4.680,18	848,65	3.831,53	0,00	717.564,02	0,00	Otplata
41	30.11.2014	0,00	0,00	4.680,18	853,17	3.827,01	0,00	716.710,85	0,00	Otplata
42	31.12.2014	0,00	0,00	4.680,18	857,72	3.822,46	0,00	715.853,13	0,00	Otplata
43	31.01.2015	0,00	0,00	4.680,18	862,30	3.817,88	0,00	714.990,83	0,00	Otplata
44	28.02.2015	0,00	0,00	4.680,18	866,90	3.813,28	0,00	714.123,93	0,00	Otplata
45	31.03.2015	0,00	0,00	4.680,18	871,52	3.808,66	0,00	713.252,41	0,00	Otplata
46	30.04.2015	0,00	0,00	4.680,18	876,17	3.804,01	0,00	712.376,24	0,00	Otplata
47	31.05.2015	0,00	0,00	4.680,18	880,84	3.799,34	0,00	711.495,40	0,00	Otplata
48	30.06.2015	0,00	0,00	4.680,18	885,54	3.794,64	0,00	710.609,86	0,00	Otplata
49	31.07.2015	0,00	0,00	4.680,18	890,26	3.789,92	0,00	709.719,60	0,00	Otplata
50	31.08.2015	0,00	0,00	4.680,18	895,01	3.785,17	0,00	708.824,59	0,00	Otplata
51	30.09.2015	0,00	0,00	4.680,18	899,78	3.780,40	0,00	707.924,81	0,00	Otplata
52	31.10.2015	0,00	0,00	4.680,18	904,58	3.775,60	0,00	707.020,23	0,00	Otplata
53	30.11.2015	0,00	0,00	4.680,18	909,41	3.770,77	0,00	706.110,82	0,00	Otplata
54	31.12.2015	0,00	0,00	4.680,18	914,26	3.765,92	0,00	705.196,56	0,00	Otplata
55	31.01.2016	0,00	0,00	4.680,18	919,13	3.761,05	0,00	704.277,43	0,00	Otplata
56	29.02.2016	0,00	0,00	4.680,18	924,03	3.756,15	0,00	703.353,40	0,00	Otplata
57	31.03.2016	0,00	0,00	4.680,18	928,96	3.751,22	0,00	702.424,44	0,00	Otplata
58	30.04.2016	0,00	0,00	4.680,18	933,92	3.746,26	0,00	701.490,52	0,00	Otplata
59	31.05.2016	0,00	0,00	4.680,18	938,90	3.741,28	0,00	700.551,62	0,00	Otplata
60	30.06.2016	0,00	0,00	4.680,18	943,90	3.736,28	0,00	699.607,72	0,00	Otplata
61	31.07.2016	0,00	0,00	4.680,18	948,94	3.731,24	0,00	698.658,78	0,00	Otplata
62	31.08.2016	0,00	0,00	4.680,18	954,00	3.726,18	0,00	697.704,78	0,00	Otplata

63	30.09.2016	0,00	0,00	4.680,18	959,09	3.721,09	0,00	696.745,69	0,00	Otplata
64	31.10.2016	0,00	0,00	4.680,18	964,20	3.715,98	0,00	695.781,49	0,00	Otplata
65	30.11.2016	0,00	0,00	4.680,18	969,35	3.710,83	0,00	694.812,14	0,00	Otplata
66	31.12.2016	0,00	0,00	4.680,18	974,52	3.705,66	0,00	693.837,62	0,00	Otplata
67	31.01.2017	0,00	0,00	4.680,18	979,71	3.700,47	0,00	692.857,91	0,00	Otplata
68	28.02.2017	0,00	0,00	4.680,18	984,94	3.695,24	0,00	691.872,97	0,00	Otplata
69	31.03.2017	0,00	0,00	4.680,18	990,19	3.689,99	0,00	690.882,78	0,00	Otplata
70	30.04.2017	0,00	0,00	4.680,18	995,47	3.684,71	0,00	689.887,31	0,00	Otplata
71	31.05.2017	0,00	0,00	4.680,18	1.000,78	3.679,40	0,00	688.886,53	0,00	Otplata
72	30.06.2017	0,00	0,00	4.680,18	1.006,12	3.674,06	0,00	687.880,41	0,00	Otplata
73	31.07.2017	0,00	0,00	4.680,18	1.011,48	3.668,70	0,00	686.868,93	0,00	Otplata
74	31.08.2017	0,00	0,00	4.680,18	1.016,88	3.663,30	0,00	685.852,05	0,00	Otplata
75	30.09.2017	0,00	0,00	4.680,18	1.022,30	3.657,88	0,00	684.829,75	0,00	Otplata
76	31.10.2017	0,00	0,00	4.680,18	1.027,75	3.652,43	0,00	683.802,00	0,00	Otplata
77	30.11.2017	0,00	0,00	4.680,18	1.033,24	3.646,94	0,00	682.768,76	0,00	Otplata
78	31.12.2017	0,00	0,00	4.680,18	1.038,75	3.641,43	0,00	681.730,01	0,00	Otplata
79	31.01.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.044,29	3.635,89	0,00	680.685,72	0,00	Otplata
80	28.02.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.049,86	3.630,32	0,00	679.635,86	0,00	Otplata
81	31.03.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.055,46	3.624,72	0,00	678.580,40	0,00	Otplata
82	30.04.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.061,08	3.619,10	0,00	677.519,32	0,00	Otplata
83	31.05.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.066,74	3.613,44	0,00	676.452,58	0,00	Otplata
84	30.06.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.072,43	3.607,75	0,00	675.380,15	0,00	Otplata
85	31.07.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.078,15	3.602,03	0,00	674.302,00	0,00	Otplata
86	31.08.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.083,90	3.596,28	0,00	673.218,10	0,00	Otplata
87	30.09.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.089,68	3.590,50	0,00	672.128,42	0,00	Otplata
88	31.10.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.095,50	3.584,68	0,00	671.032,92	0,00	Otplata
89	30.11.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.101,34	3.578,84	0,00	669.931,58	0,00	Otplata
90	31.12.2018	0,00	0,00	4.680,18	1.107,21	3.572,97	0,00	668.824,37	0,00	Otplata
91	31.01.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.113,12	3.567,06	0,00	667.711,25	0,00	Otplata
92	28.02.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.119,05	3.561,13	0,00	666.592,20	0,00	Otplata
93	31.03.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.125,02	3.555,16	0,00	665.467,18	0,00	Otplata
94	30.04.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.131,02	3.549,16	0,00	664.336,16	0,00	Otplata
95	31.05.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.137,05	3.543,13	0,00	663.199,11	0,00	Otplata
96	30.06.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.143,12	3.537,06	0,00	662.055,99	0,00	Otplata
97	31.07.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.149,21	3.530,97	0,00	660.906,78	0,00	Otplata
98	31.08.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.155,34	3.524,84	0,00	659.751,44	0,00	Otplata
99	30.09.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.161,51	3.518,67	0,00	658.589,93	0,00	Otplata
100	31.10.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.167,70	3.512,48	0,00	657.422,23	0,00	Otplata
101	30.11.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.173,93	3.506,25	0,00	656.248,30	0,00	Otplata
102	31.12.2019	0,00	0,00	4.680,18	1.180,19	3.499,99	0,00	655.068,11	0,00	Otplata
103	31.01.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.186,48	3.493,70	0,00	653.881,63	0,00	Otplata
104	29.02.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.192,81	3.487,37	0,00	652.688,82	0,00	Otplata
105	31.03.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.199,17	3.481,01	0,00	651.489,65	0,00	Otplata
106	30.04.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.205,57	3.474,61	0,00	650.284,08	0,00	Otplata
107	31.05.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.212,00	3.468,18	0,00	649.072,08	0,00	Otplata

108	30.06.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.218,46	3.461,72	0,00	647.853,62	0,00	Otplata
109	31.07.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.224,96	3.455,22	0,00	646.628,66	0,00	Otplata
110	31.08.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.231,49	3.448,69	0,00	645.397,17	0,00	Otplata
111	30.09.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.238,06	3.442,12	0,00	644.159,11	0,00	Otplata
112	31.10.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.244,66	3.435,52	0,00	642.914,45	0,00	Otplata
113	30.11.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.251,30	3.428,88	0,00	641.663,15	0,00	Otplata
114	31.12.2020	0,00	0,00	4.680,18	1.257,98	3.422,20	0,00	640.405,17	0,00	Otplata
115	31.01.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.264,69	3.415,49	0,00	639.140,48	0,00	Otplata
116	28.02.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.271,43	3.408,75	0,00	637.869,05	0,00	Otplata
117	31.03.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.278,21	3.401,97	0,00	636.590,84	0,00	Otplata
118	30.04.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.285,03	3.395,15	0,00	635.305,81	0,00	Otplata
119	31.05.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.291,88	3.388,30	0,00	634.013,93	0,00	Otplata
120	30.06.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.298,77	3.381,41	0,00	632.715,16	0,00	Otplata
121	31.07.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.305,70	3.374,48	0,00	631.409,46	0,00	Otplata
122	31.08.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.312,66	3.367,52	0,00	630.096,80	0,00	Otplata
123	30.09.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.319,66	3.360,52	0,00	628.777,14	0,00	Otplata
124	31.10.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.326,70	3.353,48	0,00	627.450,44	0,00	Otplata
125	30.11.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.333,78	3.346,40	0,00	626.116,66	0,00	Otplata
126	31.12.2021	0,00	0,00	4.680,18	1.340,89	3.339,29	0,00	624.775,77	0,00	Otplata
127	31.01.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.348,04	3.332,14	0,00	623.427,73	0,00	Otplata
128	28.02.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.355,23	3.324,95	0,00	622.072,50	0,00	Otplata
129	31.03.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.362,46	3.317,72	0,00	620.710,04	0,00	Otplata
130	30.04.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.369,73	3.310,45	0,00	619.340,31	0,00	Otplata
131	31.05.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.377,03	3.303,15	0,00	617.963,28	0,00	Otplata
132	30.06.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.384,38	3.295,80	0,00	616.578,90	0,00	Otplata
133	31.07.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.391,76	3.288,42	0,00	615.187,14	0,00	Otplata
134	31.08.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.399,18	3.281,00	0,00	613.787,96	0,00	Otplata
135	30.09.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.406,64	3.273,54	0,00	612.381,32	0,00	Otplata
136	31.10.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.414,15	3.266,03	0,00	610.967,17	0,00	Otplata
137	30.11.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.421,69	3.258,49	0,00	609.545,48	0,00	Otplata
138	31.12.2022	0,00	0,00	4.680,18	1.429,27	3.250,91	0,00	608.116,21	0,00	Otplata
139	31.01.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.436,89	3.243,29	0,00	606.679,32	0,00	Otplata
140	28.02.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.444,56	3.235,62	0,00	605.234,76	0,00	Otplata
141	31.03.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.452,26	3.227,92	0,00	603.782,50	0,00	Otplata
142	30.04.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.460,01	3.220,17	0,00	602.322,49	0,00	Otplata
143	31.05.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.467,79	3.212,39	0,00	600.854,70	0,00	Otplata
144	30.06.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.475,62	3.204,56	0,00	599.379,08	0,00	Otplata
145	31.07.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.483,49	3.196,69	0,00	597.895,59	0,00	Otplata
146	31.08.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.491,40	3.188,78	0,00	596.404,19	0,00	Otplata
147	30.09.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.499,36	3.180,82	0,00	594.904,83	0,00	Otplata
148	31.10.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.507,35	3.172,83	0,00	593.397,48	0,00	Otplata
149	30.11.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.515,39	3.164,79	0,00	591.882,09	0,00	Otplata
150	31.12.2023	0,00	0,00	4.680,18	1.523,48	3.156,70	0,00	590.358,61	0,00	Otplata
151	31.01.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.531,60	3.148,58	0,00	588.827,01	0,00	Otplata
152	29.02.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.539,77	3.140,41	0,00	587.287,24	0,00	Otplata

153	31.03.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.547,98	3.132,20	0,00	585.739,26	0,00	Otplata
154	30.04.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.556,24	3.123,94	0,00	584.183,02	0,00	Otplata
155	31.05.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.564,54	3.115,64	0,00	582.618,48	0,00	Otplata
156	30.06.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.572,88	3.107,30	0,00	581.045,60	0,00	Otplata
157	31.07.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.581,27	3.098,91	0,00	579.464,33	0,00	Otplata
158	31.08.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.589,70	3.090,48	0,00	577.874,63	0,00	Otplata
159	30.09.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.598,18	3.082,00	0,00	576.276,45	0,00	Otplata
160	31.10.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.606,71	3.073,47	0,00	574.669,74	0,00	Otplata
161	30.11.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.615,27	3.064,91	0,00	573.054,47	0,00	Otplata
162	31.12.2024	0,00	0,00	4.680,18	1.623,89	3.056,29	0,00	571.430,58	0,00	Otplata
163	31.01.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.632,55	3.047,63	0,00	569.798,03	0,00	Otplata
164	28.02.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.641,26	3.038,92	0,00	568.156,77	0,00	Otplata
165	31.03.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.650,01	3.030,17	0,00	566.506,76	0,00	Otplata
166	30.04.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.658,81	3.021,37	0,00	564.847,95	0,00	Otplata
167	31.05.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.667,66	3.012,52	0,00	563.180,29	0,00	Otplata
168	30.06.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.676,55	3.003,63	0,00	561.503,74	0,00	Otplata
169	31.07.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.685,49	2.994,69	0,00	559.818,25	0,00	Otplata
170	31.08.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.694,48	2.985,70	0,00	558.123,77	0,00	Otplata
171	30.09.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.703,52	2.976,66	0,00	556.420,25	0,00	Otplata
172	31.10.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.712,61	2.967,57	0,00	554.707,64	0,00	Otplata
173	30.11.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.721,74	2.958,44	0,00	552.985,90	0,00	Otplata
174	31.12.2025	0,00	0,00	4.680,18	1.730,92	2.949,26	0,00	551.254,98	0,00	Otplata
175	31.01.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.740,15	2.940,03	0,00	549.514,83	0,00	Otplata
176	28.02.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.749,43	2.930,75	0,00	547.765,40	0,00	Otplata
177	31.03.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.758,76	2.921,42	0,00	546.006,64	0,00	Otplata
178	30.04.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.768,14	2.912,04	0,00	544.238,50	0,00	Otplata
179	31.05.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.777,57	2.902,61	0,00	542.460,93	0,00	Otplata
180	30.06.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.787,06	2.893,12	0,00	540.673,87	0,00	Otplata
181	31.07.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.796,59	2.883,59	0,00	538.877,28	0,00	Otplata
182	31.08.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.806,17	2.874,01	0,00	537.071,11	0,00	Otplata
183	30.09.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.815,80	2.864,38	0,00	535.255,31	0,00	Otplata
184	31.10.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.825,49	2.854,69	0,00	533.429,82	0,00	Otplata
185	30.11.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.835,22	2.844,96	0,00	531.594,60	0,00	Otplata
186	31.12.2026	0,00	0,00	4.680,18	1.845,01	2.835,17	0,00	529.749,59	0,00	Otplata
187	31.01.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.854,85	2.825,33	0,00	527.894,74	0,00	Otplata
188	28.02.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.864,74	2.815,44	0,00	526.030,00	0,00	Otplata
189	31.03.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.874,69	2.805,49	0,00	524.155,31	0,00	Otplata
190	30.04.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.884,69	2.795,49	0,00	522.270,62	0,00	Otplata
191	31.05.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.894,74	2.785,44	0,00	520.375,88	0,00	Otplata
192	30.06.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.904,84	2.775,34	0,00	518.471,04	0,00	Otplata
193	31.07.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.915,00	2.765,18	0,00	516.556,04	0,00	Otplata
194	31.08.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.925,21	2.754,97	0,00	514.630,83	0,00	Otplata
195	30.09.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.935,48	2.744,70	0,00	512.695,35	0,00	Otplata
196	31.10.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.945,80	2.734,38	0,00	510.749,55	0,00	Otplata
197	30.11.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.956,18	2.724,00	0,00	508.793,37	0,00	Otplata

198	31.12.2027	0,00	0,00	4.680,18	1.966,62	2.713,56	0,00	506.826,75	0,00	Otplata
199	31.01.2028	0,00	0,00	4.680,18	1.977,10	2.703,08	0,00	504.849,65	0,00	Otplata
200	29.02.2028	0,00	0,00	4.680,18	1.987,65	2.692,53	0,00	502.862,00	0,00	Otplata
201	31.03.2028	0,00	0,00	4.680,18	1.998,25	2.681,93	0,00	500.863,75	0,00	Otplata
202	30.04.2028	0,00	0,00	4.680,18	2.008,91	2.671,27	0,00	498.854,84	0,00	Otplata
203	31.05.2028	0,00	0,00	4.680,18	2.019,62	2.660,56	0,00	496.835,22	0,00	Otplata
204	30.06.2028	0,00	0,00	4.680,18	2.030,39	2.649,79	0,00	494.804,83	0,00	Otplata
205	31.07.2028	0,00	0,00	4.680,18	2.041,22	2.638,96	0,00	492.763,61	0,00	Otplata
206	31.08.2028	0,00	0,00	4.680,18	2.052,11	2.628,07	0,00	490.711,50	0,00	Otplata
207	30.09.2028	0,00	0,00	4.680,18	2.063,05	2.617,13	0,00	488.648,45	0,00	Otplata
208	31.10.2028	0,00	0,00	4.680,18	2.074,05	2.606,13	0,00	486.574,40	0,00	Otplata
209	30.11.2028	0,00	0,00	4.680,18	2.085,12	2.595,06	0,00	484.489,28	0,00	Otplata
210	31.12.2028	0,00	0,00	4.680,18	2.096,24	2.583,94	0,00	482.393,04	0,00	Otplata
211	31.01.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.107,42	2.572,76	0,00	480.285,62	0,00	Otplata
212	28.02.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.118,66	2.561,52	0,00	478.166,96	0,00	Otplata
213	31.03.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.129,96	2.550,22	0,00	476.037,00	0,00	Otplata
214	30.04.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.141,32	2.538,86	0,00	473.895,68	0,00	Otplata
215	31.05.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.152,74	2.527,44	0,00	471.742,94	0,00	Otplata
216	30.06.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.164,22	2.515,96	0,00	469.578,72	0,00	Otplata
217	31.07.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.175,76	2.504,42	0,00	467.402,96	0,00	Otplata
218	31.08.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.187,36	2.492,82	0,00	465.215,60	0,00	Otplata
219	30.09.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.199,03	2.481,15	0,00	463.016,57	0,00	Otplata
220	31.10.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.210,76	2.469,42	0,00	460.805,81	0,00	Otplata
221	30.11.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.222,55	2.457,63	0,00	458.583,26	0,00	Otplata
222	31.12.2029	0,00	0,00	4.680,18	2.234,40	2.445,78	0,00	456.348,86	0,00	Otplata
223	31.01.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.246,32	2.433,86	0,00	454.102,54	0,00	Otplata
224	28.02.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.258,30	2.421,88	0,00	451.844,24	0,00	Otplata
225	31.03.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.270,34	2.409,84	0,00	449.573,90	0,00	Otplata
226	30.04.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.282,45	2.397,73	0,00	447.291,45	0,00	Otplata
227	31.05.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.294,63	2.385,55	0,00	444.996,82	0,00	Otplata
228	30.06.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.306,86	2.373,32	0,00	442.689,96	0,00	Otplata
229	31.07.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.319,17	2.361,01	0,00	440.370,79	0,00	Otplata
230	31.08.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.331,54	2.348,64	0,00	438.039,25	0,00	Otplata
231	30.09.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.343,97	2.336,21	0,00	435.695,28	0,00	Otplata
232	31.10.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.356,47	2.323,71	0,00	433.338,81	0,00	Otplata
233	30.11.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.369,04	2.311,14	0,00	430.969,77	0,00	Otplata
234	31.12.2030	0,00	0,00	4.680,18	2.381,67	2.298,51	0,00	428.588,10	0,00	Otplata
235	31.01.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.394,38	2.285,80	0,00	426.193,72	0,00	Otplata
236	28.02.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.407,15	2.273,03	0,00	423.786,57	0,00	Otplata
237	31.03.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.419,98	2.260,20	0,00	421.366,59	0,00	Otplata
238	30.04.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.432,89	2.247,29	0,00	418.933,70	0,00	Otplata
239	31.05.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.445,87	2.234,31	0,00	416.487,83	0,00	Otplata
240	30.06.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.458,91	2.221,27	0,00	414.028,92	0,00	Otplata
241	31.07.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.472,03	2.208,15	0,00	411.556,89	0,00	Otplata
242	31.08.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.485,21	2.194,97	0,00	409.071,68	0,00	Otplata

243	30.09.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.498,46	2.181,72	0,00	406.573,22	0,00	Otplata
244	31.10.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.511,79	2.168,39	0,00	404.061,43	0,00	Otplata
245	30.11.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.525,19	2.154,99	0,00	401.536,24	0,00	Otplata
246	31.12.2031	0,00	0,00	4.680,18	2.538,65	2.141,53	0,00	398.997,59	0,00	Otplata
247	31.01.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.552,19	2.127,99	0,00	396.445,40	0,00	Otplata
248	29.02.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.565,80	2.114,38	0,00	393.879,60	0,00	Otplata
249	31.03.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.579,49	2.100,69	0,00	391.300,11	0,00	Otplata
250	30.04.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.593,25	2.086,93	0,00	388.706,86	0,00	Otplata
251	31.05.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.607,08	2.073,10	0,00	386.099,78	0,00	Otplata
252	30.06.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.620,98	2.059,20	0,00	383.478,80	0,00	Otplata
253	31.07.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.634,96	2.045,22	0,00	380.843,84	0,00	Otplata
254	31.08.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.649,01	2.031,17	0,00	378.194,83	0,00	Otplata
255	30.09.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.663,14	2.017,04	0,00	375.531,69	0,00	Otplata
256	31.10.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.677,34	2.002,84	0,00	372.854,35	0,00	Otplata
257	30.11.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.691,62	1.988,56	0,00	370.162,73	0,00	Otplata
258	31.12.2032	0,00	0,00	4.680,18	2.705,98	1.974,20	0,00	367.456,75	0,00	Otplata
259	31.01.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.720,41	1.959,77	0,00	364.736,34	0,00	Otplata
260	28.02.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.734,92	1.945,26	0,00	362.001,42	0,00	Otplata
261	31.03.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.749,51	1.930,67	0,00	359.251,91	0,00	Otplata
262	30.04.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.764,17	1.916,01	0,00	356.487,74	0,00	Otplata
263	31.05.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.778,91	1.901,27	0,00	353.708,83	0,00	Otplata
264	30.06.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.793,73	1.886,45	0,00	350.915,10	0,00	Otplata
265	31.07.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.808,63	1.871,55	0,00	348.106,47	0,00	Otplata
266	31.08.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.823,61	1.856,57	0,00	345.282,86	0,00	Otplata
267	30.09.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.838,67	1.841,51	0,00	342.444,19	0,00	Otplata
268	31.10.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.853,81	1.826,37	0,00	339.590,38	0,00	Otplata
269	30.11.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.869,03	1.811,15	0,00	336.721,35	0,00	Otplata
270	31.12.2033	0,00	0,00	4.680,18	2.884,33	1.795,85	0,00	333.837,02	0,00	Otplata
271	31.01.2034	0,00	0,00	4.680,18	2.899,72	1.780,46	0,00	330.937,30	0,00	Otplata
272	28.02.2034	0,00	0,00	4.680,18	2.915,18	1.765,00	0,00	328.022,12	0,00	Otplata
273	31.03.2034	0,00	0,00	4.680,18	2.930,73	1.749,45	0,00	325.091,39	0,00	Otplata
274	30.04.2034	0,00	0,00	4.680,18	2.946,36	1.733,82	0,00	322.145,03	0,00	Otplata
275	31.05.2034	0,00	0,00	4.680,18	2.962,07	1.718,11	0,00	319.182,96	0,00	Otplata
276	30.06.2034	0,00	0,00	4.680,18	2.977,87	1.702,31	0,00	316.205,09	0,00	Otplata
277	31.07.2034	0,00	0,00	4.680,18	2.993,75	1.686,43	0,00	313.211,34	0,00	Otplata
278	31.08.2034	0,00	0,00	4.680,18	3.009,72	1.670,46	0,00	310.201,62	0,00	Otplata
279	30.09.2034	0,00	0,00	4.680,18	3.025,77	1.654,41	0,00	307.175,85	0,00	Otplata
280	31.10.2034	0,00	0,00	4.680,18	3.041,91	1.638,27	0,00	304.133,94	0,00	Otplata
281	30.11.2034	0,00	0,00	4.680,18	3.058,13	1.622,05	0,00	301.075,81	0,00	Otplata
282	31.12.2034	0,00	0,00	4.680,18	3.074,44	1.605,74	0,00	298.001,37	0,00	Otplata
283	31.01.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.090,84	1.589,34	0,00	294.910,53	0,00	Otplata
284	28.02.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.107,32	1.572,86	0,00	291.803,21	0,00	Otplata
285	31.03.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.123,90	1.556,28	0,00	288.679,31	0,00	Otplata
286	30.04.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.140,56	1.539,62	0,00	285.538,75	0,00	Otplata
287	31.05.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.157,31	1.522,87	0,00	282.381,44	0,00	Otplata

288	30.06.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.174,15	1.506,03	0,00	279.207,29	0,00	Otplata
289	31.07.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.191,07	1.489,11	0,00	276.016,22	0,00	Otplata
290	31.08.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.208,09	1.472,09	0,00	272.808,13	0,00	Otplata
291	30.09.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.225,20	1.454,98	0,00	269.582,93	0,00	Otplata
292	31.10.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.242,40	1.437,78	0,00	266.340,53	0,00	Otplata
293	30.11.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.259,70	1.420,48	0,00	263.080,83	0,00	Otplata
294	31.12.2035	0,00	0,00	4.680,18	3.277,08	1.403,10	0,00	259.803,75	0,00	Otplata
295	31.01.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.294,56	1.385,62	0,00	256.509,19	0,00	Otplata
296	29.02.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.312,13	1.368,05	0,00	253.197,06	0,00	Otplata
297	31.03.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.329,80	1.350,38	0,00	249.867,26	0,00	Otplata
298	30.04.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.347,55	1.332,63	0,00	246.519,71	0,00	Otplata
299	31.05.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.365,41	1.314,77	0,00	243.154,30	0,00	Otplata
300	30.06.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.383,36	1.296,82	0,00	239.770,94	0,00	Otplata
301	31.07.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.401,40	1.278,78	0,00	236.369,54	0,00	Otplata
302	31.08.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.419,54	1.260,64	0,00	232.950,00	0,00	Otplata
303	30.09.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.437,78	1.242,40	0,00	229.512,22	0,00	Otplata
304	31.10.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.456,11	1.224,07	0,00	226.056,11	0,00	Otplata
305	30.11.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.474,55	1.205,63	0,00	222.581,56	0,00	Otplata
306	31.12.2036	0,00	0,00	4.680,18	3.493,08	1.187,10	0,00	219.088,48	0,00	Otplata
307	31.01.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.511,71	1.168,47	0,00	215.576,77	0,00	Otplata
308	28.02.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.530,44	1.149,74	0,00	212.046,33	0,00	Otplata
309	31.03.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.549,27	1.130,91	0,00	208.497,06	0,00	Otplata
310	30.04.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.568,20	1.111,98	0,00	204.928,86	0,00	Otplata
311	31.05.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.587,23	1.092,95	0,00	201.341,63	0,00	Otplata
312	30.06.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.606,36	1.073,82	0,00	197.735,27	0,00	Otplata
313	31.07.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.625,59	1.054,59	0,00	194.109,68	0,00	Otplata
314	31.08.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.644,93	1.035,25	0,00	190.464,75	0,00	Otplata
315	30.09.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.664,37	1.015,81	0,00	186.800,38	0,00	Otplata
316	31.10.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.683,91	996,27	0,00	183.116,47	0,00	Otplata
317	30.11.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.703,56	976,62	0,00	179.412,91	0,00	Otplata
318	31.12.2037	0,00	0,00	4.680,18	3.723,31	956,87	0,00	175.689,60	0,00	Otplata
319	31.01.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.743,17	937,01	0,00	171.946,43	0,00	Otplata
320	28.02.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.763,13	917,05	0,00	168.183,30	0,00	Otplata
321	31.03.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.783,20	896,98	0,00	164.400,10	0,00	Otplata
322	30.04.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.803,38	876,80	0,00	160.596,72	0,00	Otplata
323	31.05.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.823,66	856,52	0,00	156.773,06	0,00	Otplata
324	30.06.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.844,06	836,12	0,00	152.929,00	0,00	Otplata
325	31.07.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.864,56	815,62	0,00	149.064,44	0,00	Otplata
326	31.08.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.885,17	795,01	0,00	145.179,27	0,00	Otplata
327	30.09.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.905,89	774,29	0,00	141.273,38	0,00	Otplata
328	31.10.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.926,72	753,46	0,00	137.346,66	0,00	Otplata
329	30.11.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.947,66	732,52	0,00	133.399,00	0,00	Otplata
330	31.12.2038	0,00	0,00	4.680,18	3.968,72	711,46	0,00	129.430,28	0,00	Otplata
331	31.01.2039	0,00	0,00	4.680,18	3.989,89	690,29	0,00	125.440,39	0,00	Otplata
332	28.02.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.011,16	669,02	0,00	121.429,23	0,00	Otplata

333	31.03.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.032,56	647,62	0,00	117.396,67	0,00	Otplata
334	30.04.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.054,06	626,12	0,00	113.342,61	0,00	Otplata
335	31.05.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.075,69	604,49	0,00	109.266,92	0,00	Otplata
336	30.06.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.097,42	582,76	0,00	105.169,50	0,00	Otplata
337	31.07.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.119,28	560,90	0,00	101.050,22	0,00	Otplata
338	31.08.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.141,25	538,93	0,00	96.908,97	0,00	Otplata
339	30.09.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.163,33	516,85	0,00	92.745,64	0,00	Otplata
340	31.10.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.185,54	494,64	0,00	88.560,10	0,00	Otplata
341	30.11.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.207,86	472,32	0,00	84.352,24	0,00	Otplata
342	31.12.2039	0,00	0,00	4.680,18	4.230,30	449,88	0,00	80.121,94	0,00	Otplata
343	31.01.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.252,86	427,32	0,00	75.869,08	0,00	Otplata
344	29.02.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.275,54	404,64	0,00	71.593,54	0,00	Otplata
345	31.03.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.298,35	381,83	0,00	67.295,19	0,00	Otplata
346	30.04.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.321,27	358,91	0,00	62.973,92	0,00	Otplata
347	31.05.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.344,32	335,86	0,00	58.629,60	0,00	Otplata
348	30.06.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.367,49	312,69	0,00	54.262,11	0,00	Otplata
349	31.07.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.390,78	289,40	0,00	49.871,33	0,00	Otplata
350	31.08.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.414,20	265,98	0,00	45.457,13	0,00	Otplata
351	30.09.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.437,74	242,44	0,00	41.019,39	0,00	Otplata
352	31.10.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.461,41	218,77	0,00	36.557,98	0,00	Otplata
353	30.11.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.485,20	194,98	0,00	32.072,78	0,00	Otplata
354	31.12.2040	0,00	0,00	4.680,18	4.509,13	171,05	0,00	27.563,65	0,00	Otplata
355	31.01.2041	0,00	0,00	4.680,18	4.533,17	147,01	0,00	23.030,48	0,00	Otplata
356	28.02.2041	0,00	0,00	4.680,18	4.557,35	122,83	0,00	18.473,13	0,00	Otplata
357	31.03.2041	0,00	0,00	4.680,18	4.581,66	98,52	0,00	13.891,47	0,00	Otplata
358	30.04.2041	0,00	0,00	4.680,18	4.606,09	74,09	0,00	9.285,38	0,00	Otplata
359	31.05.2041	0,00	0,00	4.680,18	4.630,66	49,52	0,00	4.654,72	0,00	Otplata
360	30.06.2041	0,00	0,00	4.679,55	4.654,72	24,83	0,00	0,00	0,00	Otplata
		739.000,00	0,00	1.682.250,79	749.000,00	936.810,62	0,00		0,00	

Napomene: Iskazana efektivna kamatna stopa važeća je na datum izračuna. Pri isplati i otplati kredita te izračunu efektivne kamatne stope korišten je tečaj važeći na datum izrade otplatnog plana.

3. Stambeni kredit uz valutnu klauzulu u EUR:

<table>
<tr><td>Namjena kredita:</td><td>

kupovina nekretnine (kuće, vikend kuće, stana, apartmana, garaže, parkirnog mjesta); potrebno je priložiti predugovor o kupoprodaji nekretnine, a po odobrenju kredita potrebno je priložiti i ugovor o kupoprodaji nekretnine ovjeren kod javnog bilježnika
refinanciranje kapare; ova namjena je moguća samo kao dodatna namjena uz kupovinu nekretnine
refinanciranje stambenog kredita; potrebno je priložiti ugovor o kreditu koji se refinancira, eventualno i pismo brisovne namjere
adaptacija nekretnine; potrebno je priložiti troškovnik
rekonstrukcija / izgradnja / dogradnja / završetak gradnje nekretnine; potrebno je priložiti pravomoćnu građevinsku dozvolu tj. ekvivalent sukladno novom Zakonu o prostornom uređenju i gradnji (rješenje o uvjetima građenja ili lokacijska dozvola), projekt i troškovnik
kupovina građevinskog zemljišta i komunalno uređenje zemljišta; potrebno je priložiti kupoprodajni ugovor i lokacijsku dozvolu ili uvjerenje o namjeni zemljišta

Napomena: Detaljan popis potrebne dokumentacije prema namjenama dostupan je u obrascu «Dokumentacija uz stambeni kredit».
</td></tr>
<tr><td>Iznos kredita:</td><td>
Od 5.000 EUR naviše u kunskoj protuvrijednosti.

Za namjenu adaptacije / rekonstrukcije / dogradnje / završetka gradnje nekretnine - od 5.000 do 75.000 EUR u kunskoj protuvrijednosti.

U iznos kredita može se uključiti:

naknada druge banke za prijevremenu konačnu otplatu u slučaju da klijent novim kreditom želi zatvoriti postojeći kredit u drugoj banci uz poštivanje zadanog omjera iznosa kredita i procijenjene vrijednosti nekretnine na koju se upisuje hipoteka
depozit

</td></tr>
<tr><td>Rok otplate:</td><td>Do 30 godina.
Za iznose do 15.000,00 EUR do 8 godina.</td></tr>
<tr><td>Poček:</td><td>Do 12 mjeseci. Poček je uključen u rok otplate.
Za vrijeme počeka obračunava se redovna kamata koja dospijeva na naplatu svakog zadnjeg dana u mjesecu. Obavijest o iznosu i datumu plaćanja kamate u razdoblju počeka Korisnik kredita će primiti na kućnu adresu.</td></tr>
<tr><td>Kamatna stopa:</td><td>
Kamatne stope u razdoblju akcije od 10.03.-30.06.2011. godine:

- za namjenu kupnje / izgradnje / refinanciranja stambenog kredita / kupnje i komunalnog uređenja zemljišta:
<table>
<tr><td>bez statusa klijenta</td><td>7,20%</td></tr>
<tr><td>uz status klijenta</td><td>6,20%</td></tr>
<tr><td>uz status klijenta – za mlade do 40 godina starosti</td><td>5,90%</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

uz status klijenta i paket tekućeg računa Vaša sretna zvijezda	**5,90%**
uz status klijenta – za refinanciranje kredita drugih banaka	**5,90%**

- **za namjenu adaptacije / rekonstrukcije / dogradnje / završetka gradnje nekretnine:**

bez statusa klijenta	**8,10%**
uz status klijenta	**7,10%**
uz status klijenta – za mlade do 40 godina starosti	**6,80%**
uz status klijenta i paket tekućeg računa Vaša sretna zvijezda	**6,80%**

U tijeku akcije kamatne stope su **fiksne na rok od 1 godine**, a nakon toga se primjenjuju niže navedene kamatne stope.

Redovna kamatna stopa za refinanciranje stambenog kredita drugih banaka
6,40%, godišnja, uz obavezan status klijenta

Redovne kamatne stope za namjenu kupnje / izgradnje / refinanciranja stambenog kredita / kupnje i komunalnog uređenja zemljišta
7,60%, godišnja, bez statusa klijenta Banke
6,85%, godišnja, uz status klijenta Banke
6,55%, godišnja, uz status klijenta – za mlade do 40 godina starosti
6,40%, godišnja, uz status klijenta i paket Vaša sretna zvijezda

Redovne kamatne stope za namjenu adaptacije / rekonstrukcije / dogradnje / završetka gradnje nekretnine
8,50%, godišnja, bez statusa klijenta Banke
7,75%, godišnja, uz status klijenta Banke
7,30%, godišnja, uz status klijenta i paket Vaša sretna zvijezda
7,45%, godišnja, uz status klijenta – za mlade do 40 godina starosti

Kamatna stopa je godišnja, promjenjiva; primjenjuje se dekurzivna metoda obračuna, proporcionalni kamatnjak.

Na sve dospjele, a nenaplaćene iznose koje Korisnik kredita duguje temeljem Ugovora o kreditu, Banka obračunava i naplaćuje zakonsku zateznu kamatu u visini od 14% godišnje, promjenjiva, od prvog dana poslije dana dospijeća do dana plaćanja.

Visinu kamatnih stopa i naknada Banka određuje i mijenja tijekom korištenja, odnosno otplate kredita, ovisno o tržišnim uvjetima na domaćem / stranom tržištu, poslovne politike Banke, kreditno-monetarne politike RH, važećih zakonskih propisa, urednosti u poslovanju klijenta i ostalih razloga koji mogu utjecati na visinu kamatnih stopa i naknada.

Interkalarna kamata:

Interkalarna kamata je kamata koja se obračunava na iznos glavnice za razdoblje od isplate (korištenja) do početka otplate kredita. Interkalarna kamatna stopa je istovjetna redovnoj kamatnoj stopi i naplaćuje se **po prodajnom tečaju** Banka za devize.

Interkalarna kamata se odbija od iznosa kredita prilikom korištenja (isplate) kredita.

Efektivna kamatna stopa (EKS):

Pregled EKS za rok otplate 30 godina:

Kamatna stopa za kupovinu fiksna 1 god.	EKS	Kamatna stopa za adaptaciju	EKS
7,20%	7,91%	**8,10%**	8,95%
6,20%	7,08%	**7,10%**	8,11%
5,90% za mlade	6,76%	**6,80% za mlade**	7,79%
5,90% uz paket i za refinanciranje druge banke	6,62%	**6,80% uz paket**	7,64%

Pregled EKS, na rok od 8 godina i maksimalni iznos 15.000 EUR i 10% depozita:

Kamatna stopa za kupovinu fiksna 1 god.	EKS
7,20%	8,37%
6,20%	7,42%
5,90% za mlade	7,07%
5,90%uz paket i za refinanciranje druge banke	6,95%

Izračun EKS temelji se na nominalnoj kamatnoj stopi uključujući sve troškove kredita koje korisnik kredita plaća Banci (interkalarna kamata, naknada, razlika u tečajevima za isplatu i naplatu kredita, depozit i sl.).

U izračun EKS nije uključen trošak police osiguranja nekretnine i police životnog osiguranja / riziko police, te trošak police osiguranja s otkupnom vrijednošću, međutim korisnik kredita je obvezan podmiriti troškove polica ako su iste instrument osiguranja kredita.
Ovisno o namjeni kredita, korisnik kredita snosi i sljedeće troškove koji ne ulaze u izračun efektivne kamatne stope: javnobilježničke pristojbe, sudske troškove izdavanja ZK izvatka i uknjižbe založnog prava u korist Banke, trošak procjene vrijednosti nekretnine, troškove izrade troškovnika.

Naknada: **BEZ NAKNADE**

Posebna pogodnost:

Besplatna SMS usluga na rok od 1 godine za korisnike kredita koji u razdoblju akcije otvore tekući račun ili paket tekućeg računa Vaša sretna zvijezda.

Korištenje kredita:	Kredit **za kupovinu / izgradnju / refinanciranje, isplaćuje se** u kunskoj protuvrijednosti **po srednjem tečaju** Banke važećem na dan korištenja (isplate) kredita. Kredit **za adaptaciju se isplaćuje** u kunskoj protuvrijednosti **po kupovnom tečaju** Banke za devize važećem na dan korištenja (isplate) kredita. Ako se radi o kupnji, kredit se isplaćuje prodavatelju. Nakon odobrenja kredita, Banka će klijentu na njegov zahtjev izdati nacrt Ugovora o kreditu, bez naplate naknade.
Otplata kredita:	Kredit se otplaćuje u jednakim mjesečnim anuitetima koji dospijevaju na naplatu svakog zadnjeg dana u mjesecu, u kunskoj protuvrijednosti **po prodajnom tečaju** Banke za devize važećem na dan dospijeća. Ako se plaćanje vrši prije roka dospijeća, primjenjivat će se tečajna lista na dan plaćanja. Prijevremena otplata kredita (djelomična ili konačna) može se izvršiti na zahtjev klijenta, uz naplatu naknade sukladno Tarifi važećoj u trenutku prijevremene otplate kredita. Sva potraživanja po kreditu naplaćuju se **po prodajnom tečaju** Banke za devize.
Preduvjeti (kreditna sposobnost):	Krediti se odobravaju kreditno sposobnim državljanima RH s primanjima koje ostvaruju unutar RH (zaposlenima ili s mirovinom u RH). Svi sudionici u kreditu moraju ostvarivati stalna mjesečna primanja (plaća, honorar, mirovina). Potrebna primanja izračunavaju se kao dio ukupne kreditne sposobnosti klijenta. U jednom kreditnom poslu mogu se pojaviti: - najviše 2 fizičke osobe zaposlene kod istog poslodavca, - samo jedna osoba: starosni umirovljenik, osoba koja ostvaruje prihode od samostalne djelatnosti (obrt, slobodno zanimanje, djelatnost poljoprivrede i šumarstva) ili osoba zaposlena kod iste, vlasnik d.o.o. s manje od 10 zaposlenih ili osoba zaposlena kod istog. Sudionici u kreditu po isteku kredita ne smiju biti stariji od **72** godine.
Instrumenti osiguranja:	<u>**Osnovni instrumenti osiguranja**</u>: • Sudužnik – prema potrebi. • Upis založnog prava na nekretninu **(hipoteka).** Po odobrenju kredita vrijednost nekretnine mora procijeniti HAAN d.o.o. ili drugi ovlašteni sudski procjenitelj. Ako procjena ne sadrži sve potrebne podatke, neće biti prihvaćena. Banka zadržava pravo izvršiti reviziju procjene. Ako klijent već ima procjenu, ona ne smije biti starija od 3 mjeseca. Podaci koje mora sadržavati elaborat sastavni su dio obrasca „Dokumentacija uz stambeni kredit“ dostupnog u poslovnicama, te na internetskim stranicama Banke. Potreban omjer iznosa kredita i procijenjene vrijednosti nekretnine iznosi **1:1**. Na nekretnini ne smije biti nikakvog tereta (hipoteka, pravo prvokupa, doživotno uživanje i sl.), osim eventualno otkupa.

Nekretnina na koju banka upisuje hipoteku u pravilu se mora odnositi na stambeni objekt: kuća, stan, apartman, garaža, pripadajuće parkirno mjesto, pripadajuće zemljište.

Ako se hipoteka upisuje na neku drugu vrstu nekretnine (npr. građevinsko zemljište, poslovni prostor i sl.), primjenjuju se drugačiji omjeri iznosa kredita i procijenjene vrijednosti nekretnine.

- Polica osiguranja nekretnine vinkulirana u korist Banke - nekretnina na koju se upisuje založno pravo osigurava se od osnovnih rizika, a polica se vinkulira u korist Banke nakon odobrenja, a prije isplate kredita.
- Polica životnog osiguranja ili riziko polica vinkulirana u korist Banke – u slučaju da je dužnik sâm u kreditu ili ako je sâm nositelj kreditne sposobnosti; ugovorena svota police (riziko ili životnog osiguranja) za slučaj smrti treba biti minimalno u visini **40%** iznosa kredita.
- Izjave o suglasnosti zapljene primanja svih sudionika u kreditu – dužnika i sudužnika.
- Zadužnica/e svih sudionika u kreditu – dužnika i sudužnika.
- Ostali instrumenti osiguranja prema potrebi.

Za iznose do 15.000,00 EUR uz rok otplate do 8 godina uz gore navedene instrumente osiguranja mogući su sljedeći modeli:

MODEL A (za sve klijente)

- **Umjesto hipoteke moguće je ponuditi 1 kreditno sposobnog jamca platca i namjenski depozit u visini 10%** od iznosa kredita. Polica osiguranja s otkupnom vrijednošću u visini 10% od iznosa kredita može zamijeniti traženi iznos depozita

MODEL B - bez jamaca (samo za klijente koji imaju primanja u banci u razdobljeu dužem od 9 mjeseci)

- **Umjesto hipoteke moguće je ponuditi namjenski depozit u visini 10% od iznosa kredita**. Polica osiguranja s otkupnom vrijednošću u visini 10% od iznosa kredita može zamijeniti traženi iznos depozita

Zajednički instrumenti osiguranja za gore navedene modele A i B su:

- Sudužnik prema potrebi
- Polica životnog osiguranja ili riziko polica vinkulirana u korist Banke – u slučaju da je dužnik sâm u kreditu ili ako je sâm nositelj kreditne sposobnosti; ugovorena svota police (riziko ili životnog osiguranja) za slučaj smrti treba biti minimalno u visini **40%** iznosa kredita ili manje – moguće su kombinacije
- Izjave o suglasnosti svih sudionika u kreditu – dužnika i sudužnika
- Zadužnica/e svih sudionika u kreditu – dužnika i sudužnika
- Ostali instrumenti osiguranja prema potrebi

U slučaju da klijent ugovori policu osiguranja s jednokratnom uplatom premije

	temeljem koje polica odmah dobiva otkupnu vrijednost u visini 10% od iznosa kredita po tarifi G11, Grawe Hrvatska d.d. poklanja riziko policu osiguranja za prvu godinu. Namjenski depozit se ugovara do dana dospijeća kredita + 1 mjesec. Kamatna stopa na depozit je 0%, promjenjiva. **Dodatni instrumenti osiguranja:** Ako procijenjena vrijednost nekretnine na koju se upisuje hipoteka banke nije dostatna da zadovolji traženi omjer, može se nadomjestiti drugim instrumentom osiguranja: • **Depozitom** na način da protuvrijednost 1 EUR depozita zamjenjuje 1 EUR potrebne procijenjene vrijednosti nekretnine. Depozit treba biti namjenski oročen na rok mjesec dana duži od roka otplate kredita u valuti uz koju je vezana valutna klauzula (u EUR-ima). Kamatna stopa na depozit je 0% godišnje, promjenjiva. • **Policom životnog osiguranja s otkupnom vrijednošću** u trenutku podnošenja zahtjeva/odobrenja kredita na način da protuvrijednost 1 EUR otkupne vrijednosti police zamjenjuje 1 EUR potrebne procijenjene vrijednosti nekretnine. Polica se vinkulira i zalaže u korist banke na rok otplate kredita. • **Udjelima u investicijskim fondovima** na način da protuvrijednost - 1,00 EUR vrijednosti udjela u fondu HI-cash, ili - 1,20 EUR vrijednosti udjela u fondu HI-conservative, ili - 1,50 EUR vrijednosti udjela u fondu HI-balanced, ili - 2,00 EUR vrijednosti udjela u fondu HI-growth, zamjenjuje 1 EUR potrebne procijenjene vrijednosti nekretnine. Ugovorom o kreditu zasniva se založno pravo nad udjelima u investicijskom fondu Banke. Dodatnim instrumentima osiguranja može se nadomjestiti **do 20%** potrebne procijenjene vrijednosti nekretnine. Ovo ograničenje ne odnosi se na depozit.
Poseban uvjet:	Klijenti koji ugovaraju kredit po kamatnoj stopi vezanoj uz paket tekućeg računa xxx mogu izabrati jedan od sljedećih paketa: Paket tekućeg računa xxx sadrži sljedeće proizvode: • tekući račun uz Visa Electron karticu • net – internetsko bankarstvo • mjesečni izvod po tekućem računu • Visa Classic kreditnu karticu Paket tekućeg računa xxx sadrži sljedeće proizvode: • tekući račun uz Visa Electron karticu • net – internetsko bankarstvo • mjesečni izvod po tekućem računu • MasterCard Revolving karticu Paket tekućeg računa xxx sadrži sljedeće proizvode: • tekući račun uz Visa Electron karticu • net – internetsko bankarstvo • mjesečni izvod po tekućem računu

	• MasterCard Revolving karticu • Visa Classic kreditnu karticu
Posebne obveze:	Klijent koji ostvari pravo na povoljniju kamatnu stopu vezano uz status klijenta, ugovorom o kreditu se obvezuje da će redovna mjesečna primanja primati preko računa otvorenog u Banci za cijelo vrijeme trajanja kredita. Ako korisnik kredita u toku trajanja kredita preusmjeri svoja redovna mjesečna primanja na račun u drugoj banci, banka zadržava pravo usklađenja kamatne stope s važećim uvjetima za stambene kredite bez obveze redovnih mjesečnih primanja. U slučaju da klijent prije odobrenja kredita još nije preusmjerio svoja redovna mjesečna primanja na račun u Banci, klijenta će se ugovorom obvezati da to učini u roku od 60 dana od dana isplate kredita. Ako to ne učini u ugovorenom roku, Banka ima pravo korigirati kamatnu stopu u skladu s važećim uvjetima za stambene kredite bez obveze redovnih mjesečnih primanja.

Tabela mjesečnih anuiteta (u EUR) prema iznosu kredita i roku otplate (u godinama)
Za namjenu kupnje / izgradnje / refinanciranja stambenog kredita / kupnje i komunalnog uređenja zemljišta

Iznos kredita u EUR	**kamatna stopa 5,90% (uz status klijenta i paket, za mlade uz status klijenta, za refinanciranje kredita drugih banaka)**					
	5 (60 rata)	**10** (120 rata)	**15** (180 rata)	**20** (240 rata)	**25** (300 rata)	**30** (360 rata)
10.000	192,87	110,52	83,85	71,07	63,83	59,32
40.000	771,46	442,08	335,39	284,27	255,29	237,26
80.000	1.542,91	884,16	670,78	568,54	510,57	474,51
100.000	1.928,64	1.105,19	838,47	710,68	638,21	593,14

Tabela mjesečnih anuiteta (u EUR) prema iznosu kredita i roku otplate (u godinama)
Za namjenu kupnje / izgradnje / refinanciranja stambenog kredita / kupnje i komunalnog uređenja zemljišta

Iznos kredita u EUR	kamatna stopa 6,20% (uz mjesečna primanja u Banci)					
	5 (60 rata)	**10** (120 rata)	**15** (180 rata)	**20** (240 rata)	**25** (300 rata)	**30** (360 rata)
10.000	194,26	112,03	85,48	72,81	65,66	61,25
40.000	777,04	448,12	341,89	291,21	262,64	244,99
80.000	1.554,08	896,23	683,77	582,42	525,27	489,98
100.000	1.942,60	1.120,28	854,71	728,02	656,59	612,47

Tabela mjesečnih anuiteta (u EUR) prema iznosu kredita i roku otplate (u godinama)
Za namjenu kupnje / izgradnje / refinanciranja stambenog kredita / kupnje i komunalnog uređenja zemljišta

Iznos kredita u EUR	kamatna stopa 7,20% (bez preusmjeravanja mjesečnih primanja u Banci)					
	5 (60 rata)	**10** (120 rata)	**15** (180 rata)	**20** (240 rata)	**25** (300 rata)	**30** (360 rata)
10.000	198,96	117,15	91,01	78,74	71,96	67,88
40.000	795,83	468,57	364,02	314,94	287,84	271,52
80.000	1.591,66	937,14	728,04	629,88	575,68	543,04
100.000	1.989,57	1.171,42	910,05	787,35	719,59	678,79

REPREZENTATIVNI PRIMJER UKUPNOG IZNOSA KREDITA I UKUPNIH TROŠKOVA

Naknada za obradu kredita	0%	**Iznos kredita (glavnice)**	**55.000,00 EUR**
Redovna kamatna stopa (fiksna 1 godinu)	5,90%	Interkalarna kamata	270,42EUR
Redovna kamatna stopa za preostali rok otplate, promjenjiva	6,40%	Kamata za razdoblje otplate	42.305,65 EUR
Mjesečni anuitet u prvoj godini otplate	390,87 EUR	Trošak obrade kredita	0 EUR
Mjesečni anuitet za preostali rok otplate	406,21 EUR	**Ukupan iznos za plaćanje**	**97.576,07EUR**

*Reprezentativni primjer je izračunat uz pretpostavku isplate 01.03.2011. godine i plaćanja interkalarne kamate do 31.03.2011. godine po modelu za klijente Banke uz otvaranje paketa tekućeg računa xxx, fiksnu kamatnu stopu prvu godinu otplate kredita i rok otplate 20 godina (240 mjeseca). EKS (efektivna kamatna stopa) za navedeni primjer iznosi **6,62%**.

LITERATURA:

1. Aljinović Z., Marasović B., Šego B.:*Financijsko modeliranje,* Split - Zagreb, 2008.
2. Chiang A.C.: *Osnovne metode matematičke ekonomije*, Mate d.o.o., Zagreb, 1994.
3. Crnjac M.: *Matematika za ekonomiste*, Ekonomski fakultet u Osijeku, Osijek, 2001.
4. Dabčević A., Dravinac N., Franić I. Sekulić B., Šego B.:*Primjena matematike za ekonomiste*, Informator, Zagreb, 1996.
5. Giunio M., Kirchbaum R., Zorica S., Crvenković Š., Marić G., Javor Lj., Amidžić K.: *Kamate jučer i danas*, TEB, Zagreb, 2008.
6. Gruić B., Jemrić I., Šutalo I., Volarević H.: *Matematika za ekonomiste i managere*, Mate d.o.o., Zagreb, 2011.
7. Hrvatski enciklopedijski riječnik, EPH d.o.o. i Novi Liber d.o.o. Zagreb, 2004.
8. Hrvatska narodna banka: *Odluka o efektivnoj kamatnoj stopi kreditnih institucija i kreditnih unija te ugovaranju usluga s potrošačima*, www.hnb.hr/propisi(odluke-nadzor-kontrola/odluke-zoki-veljača-2012.
9. Kovačić B., Radišić B.: *Gospodarska matematika*, Školska knjiga, Veleučilište u Požegi, Zagreb, 2011.
10. Matejaš J. : *Fin-mat-1*, www.efzg.unizg.hr/jmatejas, svibanj, 2012.
11. Matejaš J. : *Fin-mat-2* www.efzg.unizg.hr/jmatejas, svibanj, 2012.
12. Matejaš J. : *Fin-mat-3* www.efzg.unizg.hr/jmatejas, svibanj, 2012.
13. Matejaš J. : *Zadaci-Fin-mat*, www.efzg.unizg.hr/jmatejas, svibanj,2012.
14. Pavlović I.: *Poslovna matematika za ekonomiste*, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Mostaru, Mostar, 2005.
15. Relić B.: *Gospodarska matematika (drugo izmijenjeno i dopunjeno izdanje)*, Računovodstvo i financije, Zagreb, 2002.

16. Relić B.: *Financijske tablice* , Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb, 1996.

17. Šego B.: *Financijska matematika*, Zgombić i partneri, Zagreb, 2008.

18. Šego B.: *Matematika za ekonomiste*, Narodne novine, Zagreb, 2005.

19. Šorić K.: *Zbirka zadataka iz matematike s primjenom u ekonomiji*, Element, Zagreb 1997.

20. Šorić K.: *Kvantitativne metode za ekonomske analize*, www.efzg.unizg.hr/ksoric, studeni, 2011.

21. Van Horne J.C.: *Financijsko upravljanje i politika*, Mate d.o.o., Zagreb, 1992.

22. Vidučić Lj. : *Financijski menadžment*, RriF, Zagreb, 2006.

23. Vujković T.: *Financijska matematika*, Perspective, Zagreb, 1994.

Izdavač
Ekonomski fakultet Sveučilišta u Rijeci

Tehnički urednik
Doc. dr. sc. Alemka Šegota

Lektorica i korektorica
prof. Marica Zrilić