

# Kvantitativne metode za poslovno odlučivanje - vježbe

---

**Prudky, Ivan**

**Educational content / Obrazovni sadržaj**

*Publication status / Verzija rada:* **Draft version / Radna verzija**

*Publication year / Godina izdavanja:* **2020**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:192:594936>

*Rights / Prava:* [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
**EKONOMSKI FAKULTET**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Economics and Business - FECRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI, EKONOMSKI FAKULTET

**DIPLOMSKI ON-LINE STUDIJ POSLOVNE EKONOMIJE**

## **KVANTITATIVNE METODE ZA POSLOVNO ODLUČIVANJE**

**VJEŽBE**

**ASISTENT: IVAN PRUDKY**

ivan.prudky@gmail.com

AK. GODINA 2018./2019.

## Matematička formulacija problema linearnog programiranja, grafičko rješavanje problema linearnog programiranja

- Funkcija cilja, ograničenja, uvjet nenegativnosti
- Kanonski oblik modela
- Strukturne i dopunske varijable
- Rješenje, moguće rješenje, optimalno rješenje
- Skup mogućih rješenja, unutarnje, granične i ekstremne točke
- Bazična rješenja, bazične i nebazične varijable

### ZADATAK 1.

Poduzeće se bavi proizvodnjom kemijskih proizvoda. U jednom proizvodnom procesu koriste se tri sirovine (S1, S2, S3) za dobivanje dva različita proizvoda (P1, P2). Mogućnost njihove proizvodnje je ograničena raspoloživim količinama sirovina. U planskom razdoblju se raspoložuje sa 20 tona sirovine S1, 5 tona S2 i 21 tonom S3. Jedna tona proizvoda P1 dobiva se miješanjem 0.4 tone S1 i 0.6 tona S3, dok se jedna tona proizvoda P2 dobiva miješanjem 0.5 tone S1, 0.2 tone S2 i 0.3 tone S3.

Zbog kvarljivosti, svaka neiskorištena količina sirovine u tekućoj proizvodnji je neupotrebljiva i mora se baciti. Na tržištu se 1 tona proizvoda P1 prodaje po cijeni od 240\$, a proizvoda P2 po 350\$. Proizvodnja 1 tone P1 zahtijeva 200\$ varijabilnih troškova, dok varijabilni troškovi proizvodnje 1 tone P2 iznose 320\$.

**U kojim količinama treba proizvoditi P1 i P2 ako je cilj uz raspoložive količine sirovina ostvariti što veći doprinos pokriću?**

	<i><b>P1</b></i>	<i><b>P2</b></i>	<i><b>Ograničenje</b></i>
<i><b>S1</b></i>	0,4 t	0,5 t	20 t
<i><b>S2</b></i>	-	0,2 t	5 t
<i><b>S3</b></i>	0,6 t	0,3 t	21 t
<i><b>PC</b></i>	240 \$	350 \$	
<i><b>VT</b></i>	200 \$	320 \$	

→ **Doprinos pokriću (DP) = ukupni prihodi (UP) – varijabilni troškovi (VT)**

→ Doprinos pokriću (DP) = prodajna cijena (PC) x količina (Q) – varijabilni troškovi (VT)

**P1:**  $DP = PC \times Q - VT$   
 $DP = 240 - 200$   
 $DP = 40\$$

**P2:**  $DP = PC \times Q - VT$   
 $DP = 350 - 320$   
 $DP = 30\$$

a) Matematički formulirajte ovaj problem linearnog programiranja

STANDARDNI OBLIK:

$$\begin{array}{l}
 MaxZ = 40x_1 + 30x_2 \quad \rightarrow \text{funkcija cilja} \\
 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 20 \\
 0,2x_2 \leq 5 \\
 0,6x_1 + 0,3x_2 \leq 21 \\
 x_1, x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \text{uvjet nenegativnosti}
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{ograničenja}
 \quad \begin{array}{l} * \text{ Max} \rightarrow \leq \\ \text{Min} \rightarrow \geq \end{array}$$

b) Napišite kanonski oblik ovog problema i obrazložite značenje strukturnih i dopunskih varijabli

KANONSKI OBLIK:

$$\begin{array}{l}
 MaxZ = 40x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad \rightarrow \text{uvijek „+“} \\
 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_3 = 20 \\
 0,2x_2 + x_4 = 5 \\
 0,6x_1 + 0,3x_2 + x_5 = 21 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{„}\leq\text{“ – dopunske varijable zbrajamo (+)} \\ \text{„}\geq\text{“ – dopunske varijable oduzimamo (-)} \end{array}$$

$x_1, x_2$  – strukturne varijable

$x_3, x_4, x_5$  – dopunske varijable

$\leq$  – NEISKORIŠTENI KAPACITETI

$\geq$  – PREBAČAJ IZNAD MIN. ZAHTJEVANE KOLIČINE

Interpretacija:

$X_1$  = količina proizvoda P1 (u tonama)

$X_2$  = količina proizvoda P2 (u tonama)

$X_3$  = neiskorišteni kapacitet sirovine S1 (u tonama)

$X_4$  = neiskorišteni kapacitet sirovine S2 (u tonama)

$X_5$  = neiskorišteni kapacitet sirovine S3 (u tonama)

- c) Prikažite grafički skup mogućih rješenja ovog problema  
 d) Odredite na grafu položaj funkcije cilja i nađite optimalno rješenje

$$p_1 \dots \begin{aligned} 0,4x_1 + 0,5x_2 &= 20 \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 40 \\ x_2 &= 0, \quad x_1 = 50 \end{aligned}$$

$$p_2 \dots \begin{aligned} 0,2x_2 &= 5 \\ x_2 &= 25 \end{aligned}$$

$$p_3 \dots \begin{aligned} 0,6x_1 + 0,3x_2 &= 21 \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 70 \\ x_2 &= 0, \quad x_1 = 35 \end{aligned}$$

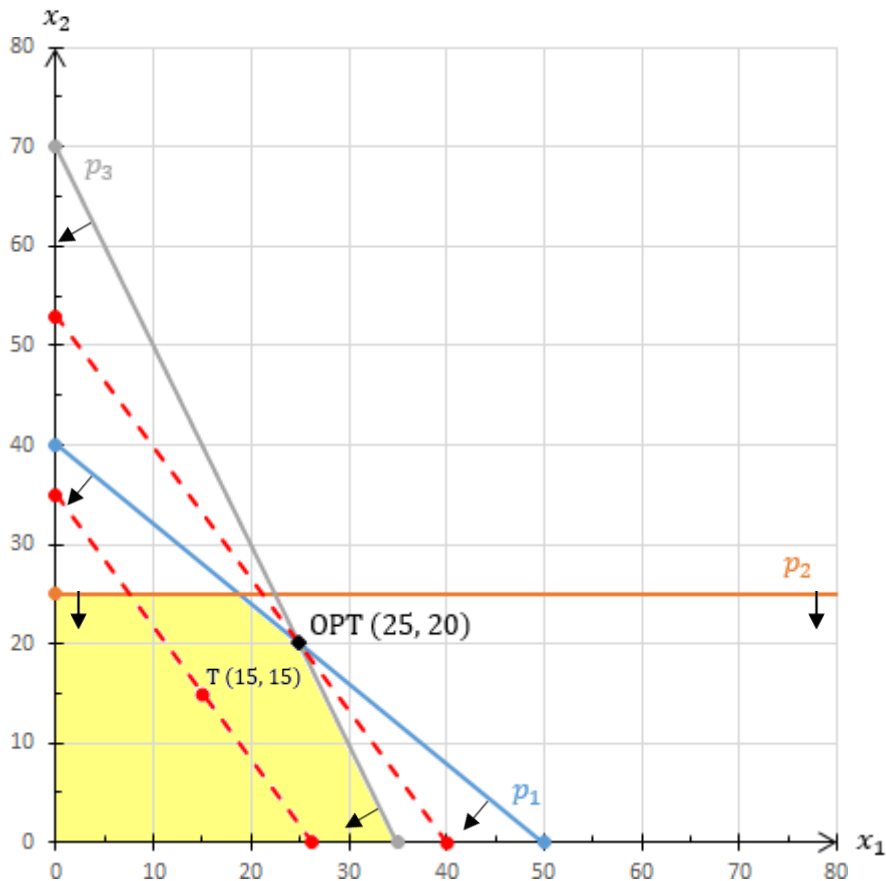
$$T(15, 15)$$

$$40 \times 15 + 30 \times 15 = 1.050$$

$$40x_1 + 30x_2 = 1.050$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 35$$

$$x_2 = 0, \quad x_1 = 26,25$$



e) Analizirajte pomoću grafa kakav utjecaj na optimalno rješenje ima uvođenje dodatnog ograničenja (količina proizvoda P2 ne bi smjela biti manja od količine P1).

$$p_1 \dots \begin{aligned} 0,4x_1 + 0,5x_2 &= 20 \\ x_1 = 0, \quad x_2 &= 40 \\ x_2 = 0, \quad x_1 &= 50 \end{aligned}$$

$$p_2 \dots \begin{aligned} 0,2x_2 &= 5 \\ x_2 &= 25 \end{aligned}$$

$$p_3 \dots \begin{aligned} 0,6x_1 + 0,3x_2 &= 21 \\ x_1 = 0, \quad x_2 &= 70 \\ x_2 = 0, \quad x_1 &= 35 \end{aligned}$$

$$p_4 \dots \begin{aligned} x_2 &\geq x_1 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

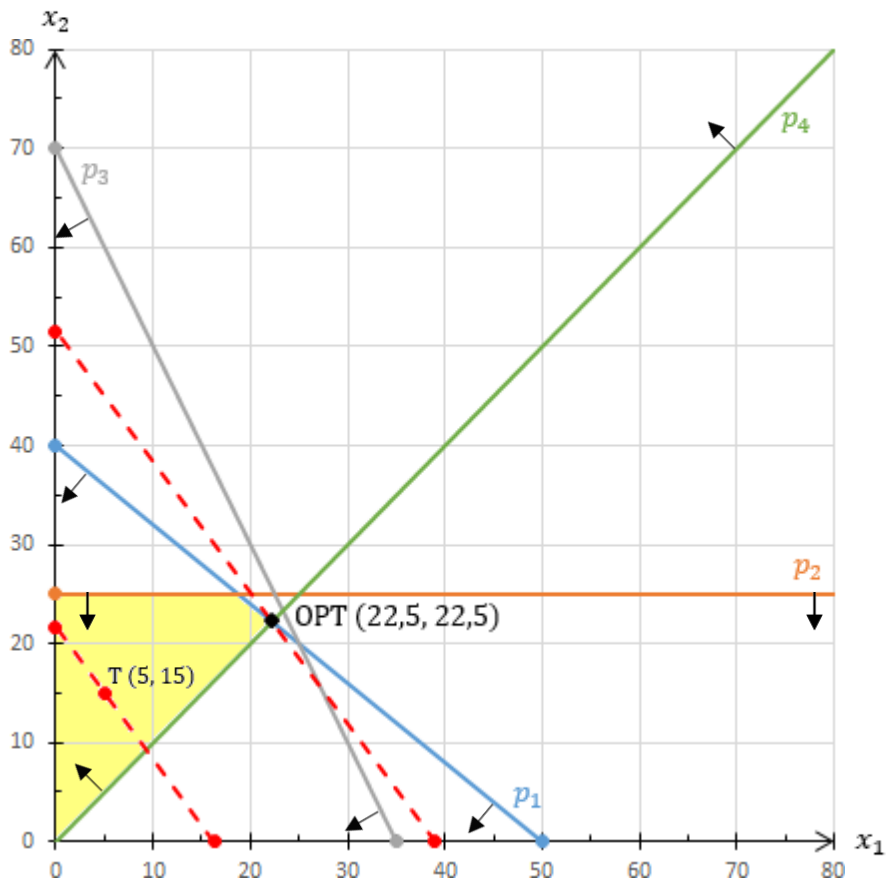
$T(5, 15)$

$$40 \times 5 + 30 \times 15 = 650$$

$$40x_1 + 30x_2 = 650$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 21,67$$

$$x_2 = 0, \quad x_1 = 16,25$$



f) Interpretirati dobiveno rješenje odgovarajući na sljedeća pitanja:

1. Koje su optimalne količine proizvodnje?

Optimalne količine proizvodnje su 25 tona proizvoda P1 i 20 tona proizvoda P2.

$$\text{MaxZ} = 40 \times 25 + 30 \times 20 = 1.600$$

2. Koliki je doprinos pokriću koji je moguće ostvariti?

Moguće je ostvariti maksimalni doprinos pokriću u iznosu od 1.600 \$.

3. Kolika je iskorištenost sirovina?

S1	$0,4 \times 25 + 0,5 \times 20 \leq 20$	→	$20 \leq 20$	S1 je u potpunosti iskorištena.
S2	$0,2 \times 20 \leq 5$	→	$4 < 5$	S2 je neiskorištena u iznosu 1 tone.
S3	$0,6 \times 25 + 0,3 \times 20 \leq 21$	→	$21 \leq 21$	S3 je u potpunosti iskorištena.

**ZADATAK 2.**

Poduzeće želi utvrditi plan proizvodnje za sljedeći mjesec. Proizvode se dva proizvoda A i B kojima se opskrbljuju druga poduzeća koja ih koriste kao sirovine u svojoj proizvodnji.

Na temelju analize zaliha i potencijalne potražnje, uprava poduzeća je donijela odluku da se u narednom mjesecu mora proizvesti ukupno barem 350 galona ovih dvaju proizvoda. Osim toga, sljedeći mjesec mora biti ispunjena narudžba jednog velikog kupca u iznosu od 125 galona proizvoda A.

U planskom razdoblju od mjesec dana raspoloživo je ukupno vrijeme proizvodnje od 600 radnih sati. Za proizvodnju jednog galona proizvoda A potrebna su 2 sata, a za proizvodnju jednog galona proizvoda B potreban je 1 sat. Troškovi proizvodnje iznose 2\$ po galonu proizvoda A i 3\$ po galonu proizvoda B.

**Koje količine proizvoda A i B treba proizvesti ako je cilj uz postavljena ograničenja minimizirati ukupne troškove proizvodnje?**

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>Ograničenje</b>
<b>Uprava</b>	1	1	350 galona
<b>Kupac</b>	1	-	125 galona
<b>t</b>	2 h	1 h	600 h
<b>TC</b>	2 \$	3 \$	



- a) Matematički formulirajte ovaj problem linearnog programiranja.

STANDARDNI OBLIK:  $MinW = 2x_1 + 3x_2$

$$x_1 + x_2 \geq 350$$

$$x_1 \geq 125$$

$$2x_1 + x_2 \leq 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- b) Napišite kanonski oblik ovog problema i obrazložite značenje svake varijable

KANONSKI OBLIK:  $MinW = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 350$$

$$x_2 - x_4 = 125$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 600$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Interpretacija:

$X_1$  = količina proizvoda A (u galonima)

$X_2$  = količina proizvoda B (u galonima)

$X_3$  = prebačaj iznad min. zahtijevane količine koju je donijela Uprava (u galonima)

$X_4$  = prebačaj iznad količine narudžbe jednog velikog kupca (u galonima)

$X_5$  = neiskorišteno vrijeme (u h)

- c) Pretpostavimo da je potrebno uvažiti još i dodatni zahtjev da količina proizvoda B mora biti dvostruko veća od količine proizvoda A. (Nadopunite polaznu matematičku formulaciju pod a).

$$MinW = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 350$$

$$x_1 \geq 125$$

$$2x_1 + x_2 \leq 600$$

$$x_2 = 2x_1 \rightarrow 2x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- d) Prikažite grafički skup mogućih rješenja ovog problema  
 e) Odredite položaj funkcije cilja i nađite optimalno rješenje

$$p_1 \dots \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 350 \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 350 \\ x_2 &= 0, \quad x_1 = 350 \end{aligned} \quad p_2 \dots \quad x_1 = 125$$

$$p_3 \dots \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 600 \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 600 \\ x_2 &= 0, \quad x_1 = 300 \end{aligned}$$

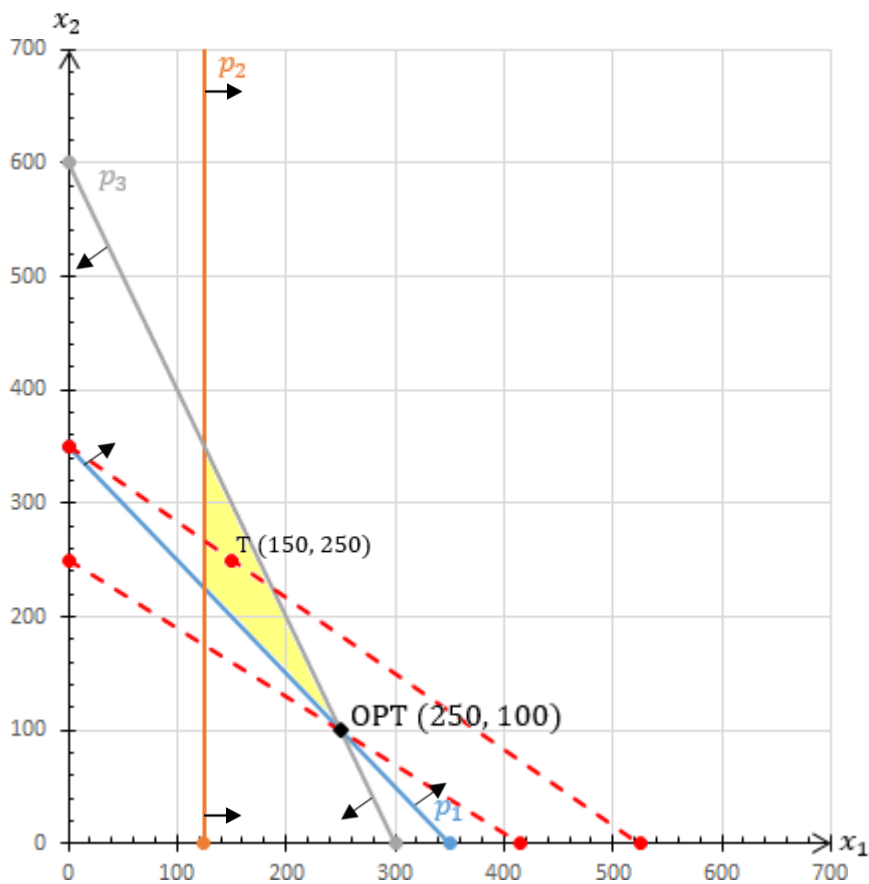
$$T(150, 250)$$

$$2 \times 150 + 3 \times 250 = 1.050$$

$$2x_1 + 3x_2 = 1.050$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 350$$

$$x_2 = 0, \quad x_1 = 525$$



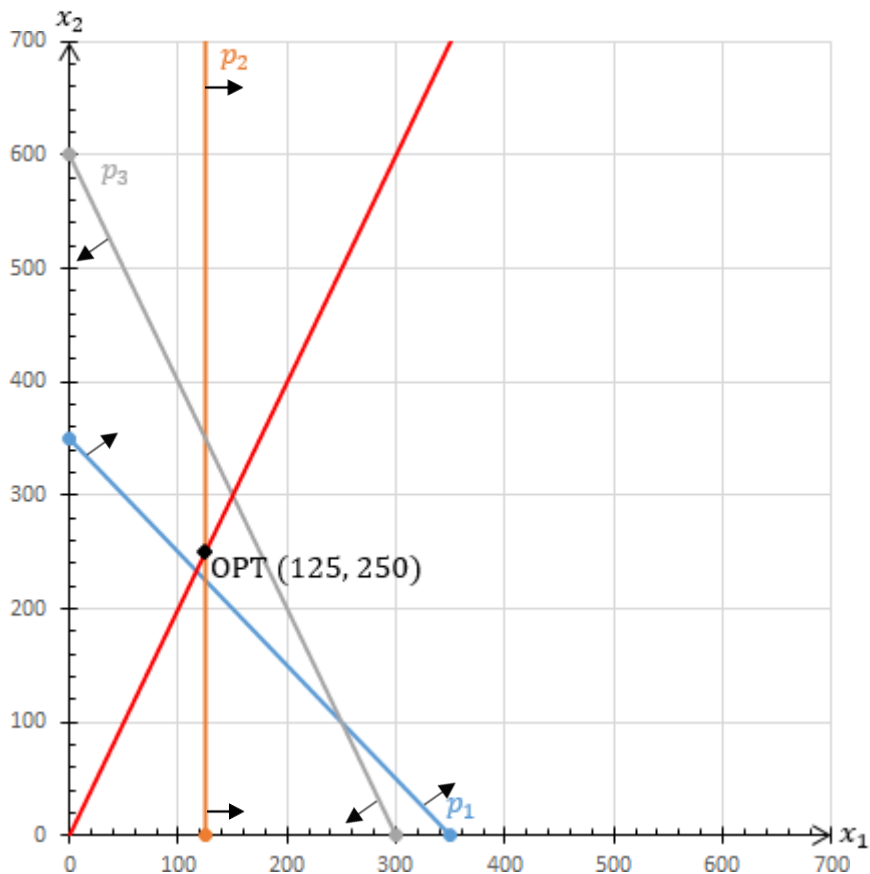
Grafički prikaz modela s dodatnim ograničenjem pod c):

$$p_1 \dots \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 350 \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 350 \\ x_2 &= 0, \quad x_1 = 350 \end{aligned}$$

$$p_2 \dots \quad x_1 = 125$$

$$p_3 \dots \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 600 \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 600 \\ x_2 &= 0, \quad x_1 = 300 \end{aligned}$$

$$p_4 \dots \quad \begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 &= 100, \quad x_2 = 200 \end{aligned}$$



- f) Analizirajte pomoću grafa kakav utjecaj na optimalno rješenje ima uvođenje pojedinog dodatnog ograničenja:

Udio proizvoda A ne smije biti manji od 60% ukupne proizvodnje.

$p_1 \dots$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 350 \\ x_1 = 0, x_2 &= 350 \\ x_2 = 0, x_1 &= 350 \end{aligned}$$

$p_2 \dots$

$$x_1 = 125$$

$p_3 \dots$

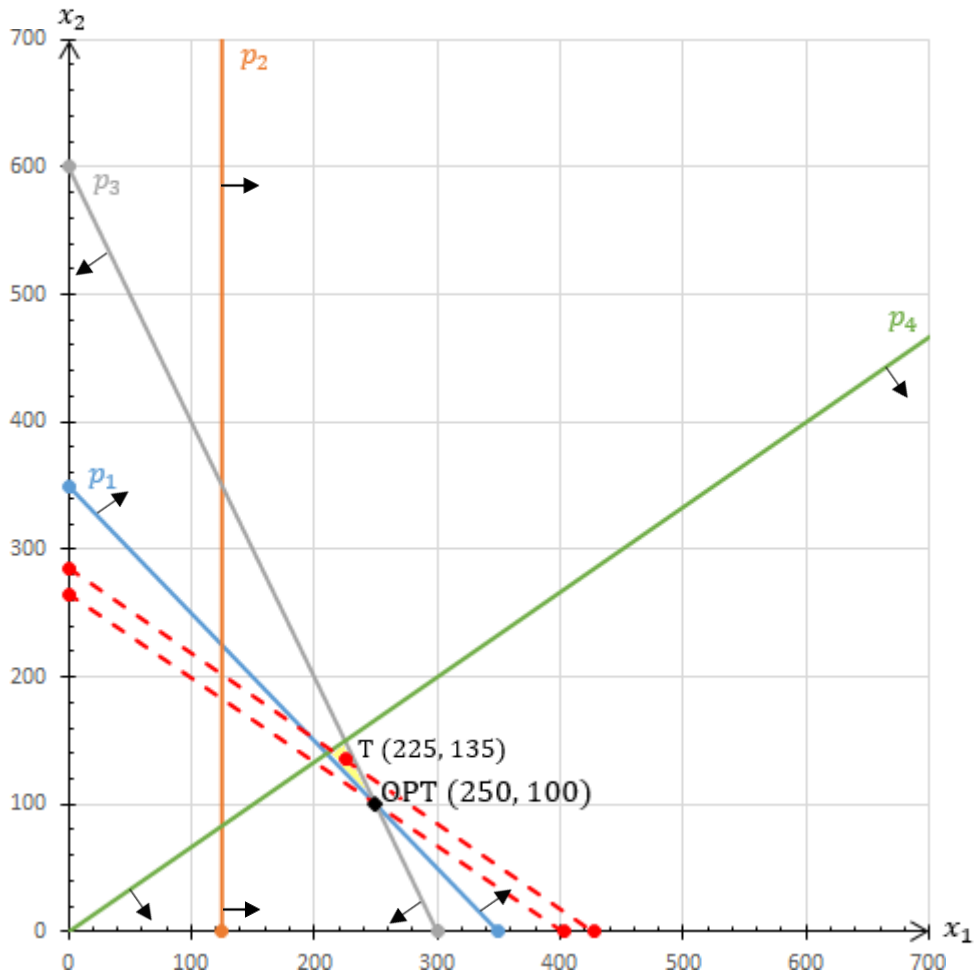
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 600 \\ x_1 = 0, x_2 &= 600 \\ x_2 = 0, x_1 &= 300 \end{aligned}$$

$p_4 \dots$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0,6(x_1 + x_2) \\ 0,4x_1 - 0,6x_2 &\geq 0 \\ x_1 = 300, x_2 &= 200 \end{aligned}$$

T (225, 135)

$$\begin{aligned} 2 \times 225 + 3 \times 135 &= 855 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 855 \\ x_1 = 0, x_2 &= 285 \\ x_2 = 0, x_1 &= 427,5 \end{aligned}$$



g) Interpretirati dobiveno rješenje odgovarajući na sljedeća pitanja:

- Koje su optimalne količine proizvodnje?

Optimalne količine proizvodnje su 250 galona proizvoda A i 100 galona proizvoda B.

- Koliki je minimalni ukupni trošak?

$\text{Min}W = 2 \times 250 + 3 \times 100 = 800$       Minimalni ukupni trošak iznosi 800 \$.

- Kolika je iskorištenost vremena?

$2 \times 250 + 100 \leq 600$       Vrijeme je u potpunosti iskorišteno.  
 $600 = 600$

- Jesu li zadovoljeni zahtjevi uprave i kupca?

$250 + 100 \geq 350$       Zahtjevi Uprave su u potpunosti ispunjeni.  
 $350 = 350$

$250 \geq 125$       Kod zahtjeva kupca došlo je do prebačaja u iznosu od 125 galona proizvoda A.

**ZADATAK 3.**

Poduzeće proizvodi dvije vrste proizvoda: A i B. Svaka jedinica proizvoda obrađuje se na četiri stroja (I, II, III, IV) prema normativima (satima proizvodnje po komadu proizvoda) navedenim u tablici:

Proizvod	Stroj	I	II	III	IV	Prodajna cijena (novčane jedinice)
	A	1	3	2	3	
B	2	2	1	1	4	
Raspoloživi kapacitet stroja (sati)	18	22	13	18		

**Matematički formulirajte model s ciljem maksimiziranja ukupnog prihoda od prodaje, uzimajući u obzir ograničenja na raspoložive kapacitete strojeva.**

STANDARDNI OBLIK:  $MaxZ = 3x_1 + 4x_2$

$$x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 22$$

$$2x_1 + x_2 \leq 13$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## Analiza osjetljivosti

- Interpretacija rješenja dobivenih pomoću Solver-a

### ZADATAK 1.

(iz zadatka 1. prethodnog gradiva)

#### Izvešće o rješenju

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$B\$14	Funkcija cilja: MAX doprinos pokriću	0	1600

→ MaxZ

Optimalnom proizvodnjom ostvaruje se maksimalan doprinos pokriću u iznosu od 1.600 \$.

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$B\$17	Varijable: Proizvod P1	0	25
\$C\$17	Varijable: Proizvod P2	0	20

→  $x_1$   
→  $x_2$

Proizvodnja je optimalna ako proizvodimo 25 tona proizvoda P1 i 20 tona proizvoda P2.

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$B\$20	Raspoloživost S1 Lijeva strana	20	\$B\$20<=\$D\$20	Binding	0
\$B\$21	Raspoloživost S2 Lijeva strana	4	\$B\$21<=\$D\$21	Not Binding	1
\$B\$22	Raspoloživost S3 Lijeva strana	21	\$B\$22<=\$D\$22	Binding	0

↓  
ISKORIŠTENO

↓  
NEISKORIŠTENO

Optimalnom proizvodnjom iskorištena je:

- cjelokupna količina sirovine S1 u iznosu od 20 tona;
- dio raspoložive sirovine S2, preostala neiskorištena količina iznosi 1 tonu;
- cjelokupna raspoloživa količina sirovine S3 u iznosu od 21 tone.

**Izvešće o osjetljivosti:**

Analizom osjetljivosti razmatra se osjetljivost rješenja na:

## A. PROMJENE PARAMETARA U FUNKCIJI CILJA

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$17	Varijable: Proizvod P1	25	0	40	20	16
\$C\$17	Varijable: Proizvod P2	20	0	30	20	10

OPTIMALNE VRIJEDNOSTI  
VARIJABLI  
(optimalne količine  
proizvodnje)

PARAMETRI U FUNKCIJI CILJA  
(doprinos pokriću po toni  
proizvoda)

DOZVOLJENO POVEĆANJE /  
SMANJENJE PARAMETARA U  
FUNKCIJI CILJA pri kojem se  
OPTIMALNE VRIJEDNOSTI  
VARIJABLI NE MIJENJAJU

P1:

Doprinos pokriću po toni proizvoda P1 može se **povećati za najviše 20 \$** (uz sve ostale parametre nepromijenjene) a da optimalne količine proizvodnje ostanu i dalje 25 tona P1 i 20 tona P2.

Doprinos pokriću po toni proizvoda P1 može se  **smanjiti za najviše 16 \$** (uz sve ostale parametre nepromijenjene) a da optimalne količine proizvodnje ostanu i dalje 25 tona P1 i 20 tona P2.

$$\downarrow P1... \quad 40 - 16 = 24$$

$$\uparrow P1... \quad 40 + 20 = 60$$

Raspon unutar kojeg može varirati doprinos pokriću 1 tone proizvoda P1 (pod pretpostavkom da se ostalo ne mijenja) tako da optimalne količine proizvodnje ostanu nepromijenjene kreće se **od 24 \$ do 60 \$**.

P2:

Doprinos pokriću po toni proizvoda P2 može se **povećati za najviše 20 \$** (uz sve ostale parametre nepromijenjene) a da optimalne količine proizvodnje ostanu i dalje 25 tona P1 i 20 tona P2.

Doprinos pokriću po toni proizvoda P2 može se  **smanjiti za najviše 10 \$** (uz sve ostale parametre nepromijenjene) a da optimalne količine proizvodnje ostanu i dalje 25 tona P1 i 20 tona P2.

$$\downarrow P2... \quad 30 - 10 = 20$$

$$\uparrow P2... \quad 30 + 20 = 50$$

Raspon unutar kojeg može varirati doprinos pokriću 1 tone proizvoda P2 (pod pretpostavkom da se ostalo ne mijenja) tako da optimalne količine proizvodnje ostanu nepromijenjene kreće se **od 20 \$ do 50 \$**.



Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$17	Varijable: Proizvod P1	25	0	40	20	16
\$C\$17	Varijable: Proizvod P2	20	0	30	20	10

**REDUCIRANI TROŠAK ILI OPORTUNITETNI TROŠAK** predstavlja iznos za koji se postojeći koeficijent u funkciji cilja razlikuje od najbliže vrijednosti tog koeficijenta pri kojoj varijabla ne bi bila jednaka nuli u optimalnom rješenju.

U ovom primjeru su oportunitetni troškovi jednaki nuli, jer se pba proizvoda proizvode (niti jedna varijabla nije jednaka nuli).

## B. PROMJENE PARAMETARA S DESNE STRANE OGRANIČENJA

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$20	Raspoloživost S1 Lijeva strana	20	33,33333333	20	1,5	6
\$B\$21	Raspoloživost S2 Lijeva strana	4	0	5	1E+30	1
\$B\$22	Raspoloživost S3 Lijeva strana	21	44,44444444	21	9	2,25

### DUALNA CIJENA („CIJENA U SJENI“)

Iznos promjene u vrijednosti funkcije cilja do koje bi došlo ako bi se desna strana tog ograničenja povećala za 1 (a da svi ostali parametri ostanu isti)

### DOPUŠTENO POVEĆANJE / SMANJENJE DESNE STRANE OGRANIČENJA

je iznos za koji možemo povećati / smanjiti desnu stranu ograničenja (uz ostale parametre iste) a da dualna cijena ostane nepromijenjena

### DUALNA CIJENA:

Uz dodatnu tonu sirovine S1 optimalni ukupni iznos doprinosa pokriću povećao bi se za 33,33 \$.

Dodatna tona sirovine S2 ne bi utjecala na optimalni iznos ukupnog doprinosa pokriću (ukupni doprinos pokriću ostaje isti).

Dodatna tona sirovine S3 bi povećala optimalni ukupni doprinos pokriću za 44,44 \$.

### DOPUŠTENO POVEĆANJE / SMANJENJE DESNE STRANE OGRANIČENJA:

#### S1:

Raspoloživa količina sirovine S1 može se **povećati za najviše 1,5 tonu** a da dualna cijena za sirovinu S1 bude 33,33 \$ (da svaka dodatna tona S1 povećava ukupni doprinos pokriću za 33,33 \$).

Raspoloživa količina sirovine S1 može se **smanjiti za najviše 6 tona** a da dualna cijena za sirovinu S1 bude 33,33 \$ (da svaka dodatna tona S1 povećava ukupni doprinos pokriću za 33,33 \$).

↓S1...     20 – 6 = 14

↑S1...     20 + 1,5 = 21,5

Raspoloživost sirovine **S1** u kojem je dualna cijena 33,33 \$ može varirati u rasponu **od 14 tona do 21,5 tonu**.

S2:

Raspoloživa količina sirovine **S2** može se **povećati neograničeno** a da dualna cijena za sirovinu S2 bude 0 \$ (dodatna tona S2 ne utječe na ukupni doprinos pokriću).

Raspoloživa količina sirovine **S2** može se **smanjiti za najviše 1 tonu** a da dualna cijena za sirovinu S2 bude 0 \$ (dodatna tona S2 ne utječe na ukupni doprinos pokriću).

$$\downarrow S2... \quad 5 - 1 = 4$$

$$\uparrow S2... \quad 5 + \infty = \infty$$

Raspoloživost sirovine **S2** u kojem je dualna cijena 0 \$ može varirati u rasponu **od 4 tone do beskonačno**.

S3:

Raspoloživa količina sirovine **S3** može se **povećati za najviše 9 tona** a da dualna cijena za sirovinu S3 bude 44,44 \$.

Raspoloživa količina sirovine **S3** može se **smanjiti za najviše 2,25 tone** a da dualna cijena za sirovinu S3 bude 44,44 \$.

$$\downarrow S3... \quad 21 - 2,25 = 18,75$$

$$\uparrow S3... \quad 21 + 9 = 30$$

Raspoloživost sirovine **S3** u kojem je dualna cijena 44,44 \$ može varirati u rasponu **od 18,75 tona do 30 tona**.

**ZADATAK 2.**

(iz zadatka 2. prethodnog gradiva)

**Izvešće o rješenju**

Target Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$B\$13	Funkcija cilja: MIN trošak	0	800

Optimalnom proizvodnjom ostvaruje se minimalni trošak u iznosu od 800 \$.

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$B\$16	Varijable: Proizvod A	0	250
\$C\$16	Varijable: Proizvod B	0	100

Proizvodnja je optimalna ako proizvodimo 250 galona proizvoda A i 100 galona proizvoda B.

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$B\$19	Uprava Lijeva strana	350	\$B\$19>=\$D\$19	Binding	0
\$B\$20	Veliki kupac Lijeva strana	250	\$B\$20>=\$D\$20	Not Binding	125
\$B\$21	Vrijeme proizvodnje Lijeva strana	600	\$B\$21<=\$D\$21	Binding	0

Proizvodi se ukupno 350 galona oba proizvoda i nema prekoračenja iznad minimalno zahtijevane količine proizvodnje.

Minimalno zahtijevana količina proizvodnje proizvoda A je prekoračena za 125 galona.

Vrijeme proizvodnje iskorišteno je u cijelosti.

**Izvešće o osjetljivosti:**

## Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$16	Varijable: Proizvod A	250	0	2	1	1E+30
\$C\$16	Varijable: Proizvod B	100	0	3	1E+30	1

Raspon unutar kojeg može varirati trošak po galonu proizvoda A (cet. par.) tako da optimalne količine proizvoda ostanu identične kreće se od 0 \$ do 30 \$.

Raspon unutar kojeg može varirati trošak po galonu proizvoda B (cet. par.) tako da optimalne količine proizvoda ostanu identične kreće se od 2 \$ do neograničene velike vrijednosti.

## Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$19	Uprava Lijeva strana	350	4	350	125	50
\$B\$20	Veliki kupac Lijeva strana	250	0	125	125	1E+30
\$B\$21	Vrijeme proizvodnje Lijeva strana	600	-1	600	100	125

UPRAVA:

Dualna vrijednost ograničenja „Uprava“ je 4, što znači da se povećanjem minimalne ukupne količine proizvodnje za 1 galon minimalni ukupni troškovi povećavaju za 4 \$ (cet. par.).

Ovaj utjecaj jediničnog povećanja minimalne ukupne količine proizvodnje na ukupne troškove ostat će isti ako se zahtjev minimalne ukupne proizvodnje kreće u rasponu od 300 galona do 475 galona.

VELIKI KUPAC:

Dualna vrijednost ograničenja „Veliki kupac“ je 0, što znači da bi narudžba velikog kupca bila veća za 1 galon proizvoda A, (cet. par.), povećanje zahtjeva kupca neće utjecati na ukupne troškove proizvodnje (jer je već i tako optimalno proizvesti više od 125 galona proizvoda A).

Promjena zahtijevane količine proizvoda A neće imati utjecaja na ukupne troškove sve dok se ta količina nalazi u rasponu od 0 galona do 250 galona.

VRIJEME PROIZVODNJE:

Dualna vrijednost ograničenja „Vrijeme proizvodnje“ je -1, što znači:

- da bi **povećanje** raspoloživog vremena za proizvodnju za 1 sat rada dovelo do **smanjenja** optimalnog iznosa troškova za 1 \$, ili
- da bi **smanjenje** raspoloživog vremena za proizvodnju za 1 sat rada dovelo do **povećanja** optimalnog iznosa troškova za 1 \$.

Ovaj utjecaj promjene raspoloživog vremena proizvodnje na ukupne troškove bio bi takav ukoliko raspoloživo vrijeme proizvodnje variramo u rasponu od 475 sati do 700 sati.

## Regressijski model

- Slučajna varijabla
- Distribucija vjerojatnosti slučajne varijable
- Očekivana vrijednost slučajne varijable
- Varijanca slučajne varijable
- OLS model, regresijska funkcija uzorka (RFU), regresijska funkcija populacije (RFP)

### ZADATAK 1.

Ocijenjen je model:

$$\hat{Y}_t = 18846,4 - 247,92X_t$$

gdje je Y broj prodanih proizvoda, a X cijena proizvoda. Podaci su sakupljeni za razdoblje od 12 mjeseci.

- a) Objasnite ekonomsko značenje ocijenjenih parametara. Obrazložite ima li parametar uz varijablu X predznak koji ste očekivali.

Porast cijene proizvoda dovesti će do smanjenja broja prodanih proizvoda. Ekonomski kriterij je ispunjen i predznak je u skladu s očekivanjima jer ukoliko se cijena poveća, broj prodanih proizvoda će se smanjiti.

- b) Zašto na lijevoj strani jednadžbe piše  $\hat{Y}_t$ , a ne  $Y_t$ ?

Jer s desne strane nema reziduala ( $e_t$ ). → razlika između stvarne i ocijenjene vrijednosti

- c) Kada bismo u jednadžbu dodali i rezidual  $e_t$ , bismo li onda na lijevoj strani pisali  $\hat{Y}_t$ ?

Ne, onda bismo pisali  $Y_t$ .

- d) O kakvoj se vrsti podataka, na osnovi kojih je model ocijenjen, ovdje radi?

Vremenskom nizu (t). → \*Vremenski presjek ima oznaku i.

- e) Je li ocijenjeni model RFP ili RFU? Obrazložite odgovor!

Regressijska funkcija uzorka, jer je uzet 1 proizvod.

\*Funkcija uzorka:  $Y_i = \hat{\beta} + \hat{\beta}x_i + e_i$

Funkcija populacije:  $Y_i = \beta_0 + \beta_1x_i + u_i$

## ZADATAK 2.

Dani su podaci:

Y <sub>i</sub>	3	5	2	7	8	4
X <sub>i</sub>	1	4	3	5	5	4

a) Ocijenite linearni model  $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$  pomoću metode najmanjih kvadrata.

n	Y <sub>i</sub>	X <sub>i</sub>	X <sub>i</sub> <sup>2</sup>	X <sub>i</sub> Y <sub>i</sub>
6	3	1	1	3
	5	4	16	20
	2	3	9	6
	7	5	25	35
	8	5	25	40
	4	4	16	16
Σ	29	22	92	120

$$\hat{\beta}_0 \times n + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

$$6\hat{\beta}_0 + 22\hat{\beta}_1 = 29$$

$$22\hat{\beta}_0 + 92\hat{\beta}_1 = 120$$

$$\hat{\beta}_0 = 0,412 \quad \hat{\beta}_1 = 1,206$$

$$\hat{Y}_i = 0,0158 + 1,3226X_i$$

b) Pretpostavimo da su poznate stvarne vrijednosti parametra  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 1,4$ . Izračunajte vrijednost reziduala i vrijednost slučajnih odstupanja za svako od šest opažanja.

Y <sub>i</sub>	X <sub>i</sub>	$\hat{Y}_i$	e <sub>i</sub>
3	1	1,4	1,6
5	4	5,6	-0,6
2	3	4,2	-2,2
7	5	7	0
8	5	7	1
4	4	5,6	-1,6
Σ	29	30,8	-1,8

$$\hat{Y}_i = 0 + 1,4X_i$$

$$e = Y_i - \hat{Y}_i$$

## ZADATAK 3.

Zadani su podaci bruto društvenog proizvoda percapita ( $GDP_{pc}$ ) u tisućama US \$ i % zaposlene radne snage u poljoprivredi za 10 zemalja:

Zemlja	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$GDP_{pc}$	5	7	7	8	8	12	10	9	8	9
% zaposlenih u poljoprivredi	8	9	9	8	10	3	5	5	6	6

a) Izračunajte parametre linearne funkcije u kojoj ćete ocijeniti vezu između % zaposlenih u poljoprivredi (zavisna varijabla Z) i razine  $GDP_{pc}$  (nezavisna varijabla G).

Zemlja	Zi	Gi	Gi <sup>2</sup>	ZiGi
A	8	5	25	40
B	9	7	49	63
C	9	7	49	63
D	8	8	64	64
E	10	8	64	80
F	3	12	144	36
G	5	10	100	50
H	5	9	81	45
I	6	8	64	48
J	6	9	81	54
$\Sigma$	69	83	721	543

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma G_i \\ \Sigma G_i & \Sigma G_i^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Z_i \\ \Sigma G_i Z_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \Sigma G_i \\ \Sigma G_i & \Sigma G_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \Sigma Z_i \\ \Sigma G_i Z_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 83 \\ 83 & 721 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 69 \\ 543 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 83 \\ 83 & 721 \end{vmatrix} = 7.210 - 6.889 = 321$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{321} \times \begin{bmatrix} 721 & -83 \\ -83 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 69 \\ 543 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{321} \times \begin{bmatrix} 721 \times 69 - 83 \times 543 \\ -83 \times 69 + 10 \times 543 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{321} \times \begin{bmatrix} 4.680 \\ -297 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,5794 \\ -0,9252 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Z}_i = 14,5794 - 0,9252G_i$$

b) Ekonomski interpretirajte značenje ocijenjenih parametara.

Ukoliko se  $GDP_{pc}$  poveća za 1.000 \$, onda će se % zaposlenosti radne snage u poljoprivredi smanjiti za 0,925 %.

c) Ako je  $GDP_{pc}$  neke zemlje 6.000\$, koliko se očekuje % zaposlenih u poljoprivredi te zemlje?

$$G_i = 6.000 \$$$

$$Z_i = 14,5794 - 0,9252 \times 6$$

$$Z_i = ?$$

$$Z_i = 9,03 \%$$

d) Obrazložite o kojoj se vrsti statističkih podataka za ocjenjivanje modela radi.

Radi se o vremenskom presjeku (10 zemalja).

#### ZADATAK 4.

Linearizirajte sljedeće nelinearne modele:

$$a) Y_i = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i} / \times \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

$$Y_i \times \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i = 1 / : Y_i$$

$$\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i = \frac{1}{Y_i}$$

$$b) Y_i = e^{\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i} / \times \ln$$

$$\ln Y_i = \ln e^{\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i}$$

$$\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i = \ln Y_i$$

$$c) Y_i = \frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i}} / \times (1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i})$$

$$Y_i \times (1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i}) = 1 / : Y_i$$

$$1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i} = \frac{1}{Y_i}$$

$$e^{\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i} = \frac{1}{Y_i} - 1 / \times \ln$$

$$\ln e^{\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i} = \ln\left(\frac{1}{Y_i} - 1\right)$$

$$\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i = \ln\left(\frac{1}{Y_i} - 1\right)$$



**ZADATAK 5.**

Koji su od navedenih modela točno označeni?

a)  $Y_j = \alpha_0 + \alpha_1 X_j + u_j$

b)  $Y_j = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_j + e_j$

c)  $Y_j = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_j + u_j$

d)  $Y_j = \alpha_0 + \alpha_1 X_j$

e)  $\hat{Y}_j = \alpha_0 + \alpha_1 X_j + e_j$

f)  $\hat{Y}_j = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_j + e_j$

- a. TOČNO – funkcija populacije.
- b. TOČNO – funkcija uzorka.
- c. NETOČNO – parametri idu bez kapica.
- d. NETOČNO – nedostaju kapice na parametrima.
- e. NETOČNO – kapice idu na parametre, a ne na  $Y_i$ .
- f. NETOČNO – maknuti kapicu s  $Y_i$ .

**LINEARNI REGRESIJSKI MODEL (EKONOMSKI I STATISTIČKI KRITERIJI)**

Za jedan restoran brze prehrane prikupljeni su podaci za protekla 33 tjedna o sljedećim varijablama:

UP – ukupni tjedni prihod od prodaje (u tisućama \$),

PC – prosječna prodajna cijena (u \$),

OGI – tjedni izdaci za oglašavanje (u tisućama \$).

Ocijenjen je linearni regresijski model kojim se želi ispitati utjecaj razine cijena i izdataka za oglašavanje na ponašanje ukupnog prihoda.

Priložen je računalni ispis ocijenjenog regresijskog modela. (Neki podaci nedostaju i potrebno ih je nadopuniti da bi se odgovorilo na pojedina pitanja!)

**Zadatak 1:**

- a) Napisati jednadžbu ocijenjenog regresijskog modela

$$\hat{P}_t = 107,609 - 7,995PC_t + 2,961OGI_t$$

- b) Interpretirati ocjene parametara uz nezavisne varijable

Porast prosječne tjedne prodajne cijene za 1 \$, uz nepromijenjene izdatke za oglašavanje, dovelo bi do smanjenja tjednog prihoda u prosjeku za 7.995 \$.

- c) Obrazložiti je li u modelu ispunjen ekonomski kriterij

Ekonomski kriterij je ispunjen jer su predznaci ekonomski prihvatljivi.

**Zadatak 2:**

Nadopuniti računalni ispis standardnim greškama parametara i t-pokazateljima i zatim:

$$s_{\beta_0} = \sqrt{\text{Var}\beta_0} = \sqrt{51,5618} = 7,18065$$

$$s_{\beta_1} = \sqrt{\text{Var}\beta_1} = \sqrt{12,0487} = 3,471124$$

$$s_{\beta_2} = \sqrt{\text{Var}\beta_2} = \sqrt{0,03859} = 0,196466$$

- a) Testirati statističku značajnost pojedinog regresijskog parametra uz nezavisnu varijablu na razini signifikantnosti 1%.

$$\alpha = 0,01$$

$$n = 33$$

$$k = 2$$

$$df = n - k - 1 = 30$$

$$t_c = 2,75$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_0}{s_{\beta_0}} = \frac{107,609}{7,18065} = 14,986$$

T-TEST:

1.	HIPOTEZE:	$H_0: \beta_1 = 0$ $H_A: \beta_1 \neq 0$	$H_0: \beta_2 = 0$ $H_A: \beta_2 \neq 0$
2.	TESTIRANJE:	$t = \frac{\hat{\beta}_1}{s_{\beta_1}} = \frac{107,609}{7,18065} = -2,303$  $p: 0,028 > 0,01$  $ t_{\beta_1}  > t_c$  $ -2,303  < 2,75$  $\rightarrow$ prihvaćamo $H_0!$	$t = \frac{\hat{\beta}_2}{s_{\beta_2}} = \frac{107,609}{7,18065} = 15,107$  $p: 0,00 < 0,01$  $ t_{\beta_1}  < t_c$  $ 15,107  > 2,75$  $\rightarrow$ odbacujemo $H_0$ , prihvaćamo $H_A!$

INTERPRETACIJA:

Uz 99 % vjerojatnosti prihvaćamo  $H_0$  za parametar PC. Zaključujemo da prodajna cijena statistički bitno ne utječe na prihod restorana, cet. par.

Uz 99 % vjerojatnosti odbacujemo  $H_0$  i prihvaćamo  $H_A$  za parametar OGL. Zaključujemo da izdaci za oglašavanje statistički bitno utječu na prihod restorana, cet. par.

$ t_\beta  < t_c$	$\rightarrow$ PRIHVAĆAMO $H_0$ , ODBACUJEMO $H_A!$	$\rightarrow$ parametar nije značajan za model
$ t_\beta  \geq t_c$	$\rightarrow$ PRIHVAĆAMO $H_A$ , ODBACUJEMO $H_0!$	$\rightarrow$ parametar je značajan za model
$p > \alpha$	$\rightarrow$ PRIHVAĆAMO $H_0$ , ODBACUJEMO $H_A!$	$\rightarrow$ parametar nije značajan za model
$p < \alpha$	$\rightarrow$ PRIHVAĆAMO $H_A$ , ODBACUJEMO $H_0!$	$\rightarrow$ parametar je značajan za model

- b) Testirati statističku značajnost pojedinog regresijskog parametra uz nezavisnu varijablu na razini signifikantnosti 5%.

ZA VJEŽBU ☺

**Zadatak 3:**

Nadopuniti računalni ispis odgovarajućim podacima u tablici ANOVA i zatim izračunati sljedeće statističke pokazatelje:

- a) Koeficijent determinacije (obični, nekorigirani)

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{7.624,37}{8.615,1701} = 0,885 \quad \rightarrow \text{što bliže 1} \quad 0,8 \text{ i više} = t; 0,6 \text{ i veće} = i$$

88,5 % varijacije zavisne varijable objašnjeno je modelom.

- b) Korigirani (prilagođeni) koeficijent determinacije

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/n - k - 1}{TSS/n - k - 1} = 1 - \frac{33,02667}{269,2241} = 0,8773$$

- c) Standardnu pogrešku regresije

$$s = \sqrt{\frac{RSS}{n - k - 1}} = \sqrt{33,02667} = 5,747$$

- d) Koeficijent varijacije zavisne varijable.

$$V = \frac{s}{\bar{Y}} \times 100 = \frac{5,747}{119,697} \times 100 = 4,8 \%$$

Ocijenjene vrijednosti zavisne varijable se razlikuju od stvarne vrijednosti zavisne varijable u prosjeku za 5.747 \$, odnosno 4,8 %.

Što se može zaključiti o razini prilagođenosti modela opažanjima?

Prilagođenost modela opažanjima je vrlo visoka (visok  $R^2$  i nizak  $V$ ).

**Zadatak 4:**

Izračunati F-pokazatelj i provesti test statističke značajnosti cjelokupnog regresijskog modela na razini signifikantnosti 1%.

$$\alpha = 0,01 \quad F_c = 5,39$$

$$n = 33$$

$$k = 2$$

$$df = n - k - 1 = 30$$

**F-TEST:**

1. HIPOTEZE:  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$

 $H_A: H_0$  nije točna

2. TESTIRANJE:  $F = \frac{ESS/k}{RSS/(n-k-1)} = \frac{7.624,37/2}{33,02667} = 115,427$

$F > F_c$

$115,427 > 5,39 \rightarrow$  odbacujemo  $H_0$ , prihvaćamo  $H_1$ !

**Zadatak 5:**

U model je uveden još jedan regresor (odnosno objašnjavajuća tj. nezavisna varijabla). \*S obzirom na rezultate ovog novog modela (2. dio računalnog ispisa) utvrdite:

- a) Hoće li se uvođenjem ove varijable razina prilagođenosti modela opažanjima povećati ili smanjiti?

Varijabla „vrijeme“ nije statistički značajna (nizak t, visok p).

- b) Kakva je statistička značajnost novouvedene varijable?

Prilagođenost se smanjila (gledamo korigirani  $R^2$ ). Obični  $R^2$  se uvijek povećava kada se nova varijabla uvodi u model, a korigirani samo onda ako je  $|t| > 1$ .

---

\*Radi se o varijabli koja predstavlja vrijeme tj. poprima vrijednost od 1 do 33 (redoslijedom opažanja u uzorku). Uvođenjem ove varijable možemo ispitati da li postoji statistički značajna tendencija povećanja ili smanjenja prihoda u promatranom periodu pod pretpostavkom konstantne razine ostalih objašnjavajućih varijabli (cijene i izdataka za oglašavanje).

REGRESS : dependentvariable is UP

Using 1 - 33

Variable	Coefficient	StdErr	T-stat	Signf
^CONST	107.609	7,18065	14,986	.000
PC	-7.99512	3,471124	-2,303	.028
OGL	2.96065	0,196466	15,107	.000

→ za 1. a) zadatak

Variance-CovarianceMatrixofCoefficients

	^CONST	PC	OGL
^CONST	51.5618	-23.8248	-.332267
PC	-23.8248	12.0487	-.164717E-01
OGL	-.332267	-.164717E-01	.385987E-01

AnalysisofVariance

SOURCE	SumofSquares	DF	MeanSqError	F Ratio / SIG(F)
Regression	7624,37	2	3812.185	
Residual	990,8001	30	33.02667	.00000
TOTAL	8615,1701	32		

Variable	Mean	Std.Dev.
UP	119.6970	
PC	1.990303	.2927615
OGL	9.457576	5.172465

----- EquationSummary -----  
 No. ofObservations = 33 R2= 0,885 (adj)= 0,8773  
 Sum of Sq. Resid. = 990.800 Std. Errorof Reg.= 5,747  
 Log(likelihood) = -102.958 Durbin-Watson = 2.07456  
 Schwarz Criterion = -108.203 F ( 2, 30) = 115,4274  
 Akaike Criterion = -105.958 Significance = .000000

REGRESS : dependentvariable is UP

Using 1 - 33

Variable	Coefficient	StdErr	T-stat	Signf
^CONST	107.599	7.71784	13.9417	.000
PC	-7.99410	3.54027	-2.25805	.032
OGL	2.96058	.200744	14.7480	.000
T	.415757E-03	.107629	.386288E-02	.997

----- EquationSummary -----  
 No. ofObservations = 33 R2= .8851 (adj)= .8731  
 Sum of Sq. Resid. = 990.800 Std. Errorof Reg.= 5.84513  
 Log(likelihood) = -102.958 Durbin-Watson = 2.07452  
 Schwarz Criterion = -109.951 F ( 3, 29) = 74.3866  
 Akaike Criterion = -106.958 Significance = .000000

**NELINEARNI OBLIK REGRESIJSKOG MODELA, DUMMY VARIJABLE****ZADATAK 1.**

Ocijeniti koliki utjecaj na prihod od prodaje trgovina mješovitom robom imaju: naseljenost na području trgovine, broj konkurentskih trgovina u blizini, pozicija trgovine (centar grada / periferija).

Podaci:  $Y_i$  – godišnji prihod od prodaje i-te trgovine (u stotinama tisuća kn)  
 $X_{1i}$  – broj stanovnika u krugu 1 km od i-te trgovine (u tisućama)  
 $X_{2i}$  – broj konkurentskih trgovina u krugu 1 km od i-te trgovine  
 $X_{3i}$  – lokacija – centar grada ili periferija (Napomena: prvih 6 trgovina u uzorku je u centru grada, ostale su na periferiji)

$i = 1, \dots, 9.$

i	Y	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>
1	10	15	23	1
2	15	32	30	1
3	20	48	36	1
4	12	18	13	1
5	25	35	9	1
6	23	40	16	1
7	17	30	5	0
8	16	26	12	0
9	20	40	15	0

a) Vrsta podataka?

Vremenski presjek.

b) Kako uvesti podatke za varijablu  $X_3$ ?

$X_3 = 1$  = centar grada

$0$  = periferija

c) Kako glasi ocijenjeni višestruki linearni regresijski model na temelju podataka za sve navedene varijable? ( $\hat{\beta}_0 = 6.024$ ,  $\hat{\beta}_1 = 0.437$ ,  $\hat{\beta}_2 = -0.327$ ,  $\hat{\beta}_3 = 3.578$ )

$$\hat{Y} = 6,024 + 0,437X_{1i} - 0,327X_{2i} + 3,578X_{3i}$$

- d) Koje značenje ima vrijednost parametra uz pojedinu objašnjavajuću varijablu (jesu li predznaci u skladu s očekivanjima)?

Ako se broj stanovnika u krugu od 1 km od i-te trgovine poveća za tisuću, cet. par., onda će se godišnji prihodi od prodaje i-te trgovine u prosjeku povećati za 43.700 kn.

Ako se broj konkurentskih trgovina u krugu od 1 km od i-te trgovine poveća za 1 trgovinu, cet. par., onda će se godišnji prihodi od prodaje i-te trgovine u prosjeku smanjiti za 32.700 kn.

Ukoliko se i-ta trgovina nalazi u centru grada onda će godišnji prihod i-te trgovine u prosjeku povećati biti veći za 357.800 kn u odnosu na i-tu trgovinu koja se nalazi u periferiji, cet. par.

- e) Procijenite modelom koliki bi godišnji prihod u prosjeku ostvarivala trgovina koja bi bila locirana izvan centra grada na području naseljenosti od samo 8.000 stanovnika u krugu 1 km ako na tom području postoji samo jedna konkurentska trgovina?

$$X_{1i} = 1$$

$$X_{2i} = 8.000$$

$$X_{3i} = 0$$

$$Y_i = 6,024 + 0,438 \times 8 - 0,327 \times 1 + 3,578 \times 0$$

$$Y_i = 9,193$$

I: Godišnji prihodi bili bi 919.300 kn.



**ZADATAK 2.**

Y = cijena kuće u tisućama €

X = dohodak u tisućama €

Interpretirajte sljedeće regresijske modele:

a)  $Y = 10 + 0,3 X$   $R^2 = 0,50$

Ako se dohodak poveća za 1.000 €, onda će se cijena u prosjeku povećati za 300 €.

b)  $\ln Y = 9,0 + 0,5 \ln X$   $R^2 = 0,60$

Ako se dohodak poveća za 1 %, onda će se cijena u prosjeku povećati za 0,5 %.

c)  $\ln Y = 8,5 + 0,04 X$   $R^2 = 0,40$

Ako se dohodak poveća za 1 €, onda će se cijena u prosjeku povećati za 1 %.

d)  $Y = 11 + 20 \ln X$   $R^2 = 0,70$

Ako se dohodak poveća za 1 %, onda će se cijena u prosjeku povećati za 200 €.

## SPECIFIKACIJA REGRESIJSKOG MODELA, MULTIKOLINEARNOST, HETEROSKEDASTIČNOST

### ZADATAK 1.

Na temelju godišnjih podataka za SAD za razdoblje od 25 godina ocijenjena su tri regresijska modela potražnje za brazilskom kavom:

Model A:

$$\hat{QB}_t = 9.1 + 7.8PB_t + 2.4PT_t + 0.0035 \ln YD_t \quad \overline{R^2} = 0.60 \quad DW = 2.01$$

t-test: (0.5) (2.0) (3.5)

Model B:

$$\hat{QB}_t^A = 9.3 + 2.6PT_t + 0.0036 \ln YD_t \quad \overline{R^2} = ? \quad DW = 0.33$$

t-test: (2.6) (4.0)

Model C:

$$\hat{QB}_t^A = 10.0 - 5.6PB_t + 2.6PT_t + 8.0PC_t + 0.0030 \ln YD_t \quad \overline{R^2} = ? \quad DW = 2.17$$

t-test: (-2.8) (2.0) (2.0) (3.0)

Varijable su:

QB – potražnja za brazilskom kavom

PB – cijena brazilske kave

PC – cijena kolumbijske kave (supstitut!)

PT – cijena čaja (supstitut!)

lnYD – prirodni logaritam raspoloživog dohotka

- a) Objasniti razlog izbora funkcijskog oblika modela A (zašto model nije linearan?)

Model A nije linearan jer je 3. varijabla ( $YD_t$ ) dana u obliku prirodnog logaritma raspoloživog dohotka. Stoga je model polulogaritamski.

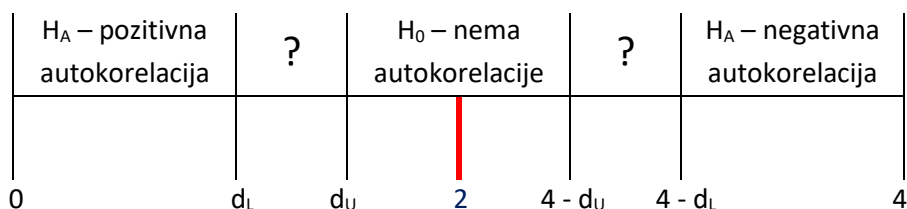
- b) Utvrditi nedostatke modela A s obzirom na to jesu li su ispunjeni ekonomski kriterij i statistički kriteriji

U modelu A nije ispunjen ekonomski kriterij jer predznak ispred 1. varijable (PB) nije u skladu s očekivanjima.

Nije ispunjen ni statistički kriterij jer bi t-vrijednost 1. varijable (PB) trebala biti negativna kada bi predznak bio u skladu s očekivanjima, te je  $R^2$  korigirani nizak, a radi se o vremenskom nizu.

- c) Ispitati prisustvo autokorelacije u sva tri modela (razina signifikantnosti 5%) i objasniti o kakvoj se autokorelaciji radi (pozitivnoj ili negativnoj, pravoj ili nepravoj)?

AUTOKORELACIJA:



	<b>MODEL A</b>	<b>MODEL B</b>	<b>MODEL C</b>
1. <u>HIPOTEZE:</u>	$H_0: \varphi = 0$ $H_A: \varphi \neq 0$	$H_0: \varphi = 0$ $H_A: \varphi \neq 0$	$H_0: \varphi = 0$ $H_A: \varphi \neq 0$
2. <u>TESTIRANJE:</u>	$\alpha = 0,05$ $n = 25$ $k = 3$ $DW = 2,01$ $d_L = 1,12$ $d_U = 1,66$	$\alpha = 0,05$ $n = 25$ $k = 2$ $DW = 0,33$ $d_L = 1,21$ $d_U = 1,55$	$\alpha = 0,05$ $n = 25$ $k = 4$ $DW = 2,17$ $d_L = 1,04$ $d_U = 1,77$
	$d_U < DW < 4 - d_U$ $\rightarrow H_0$	$0 < DW < d_L$ $\rightarrow H_A$	$d_U < DW < 4 - d_U$ $\rightarrow H_0$
3. <u>ZKLJUČAK:</u>	Uz 95 % vjerojatnosti prihvaćamo $H_0$ te zaključujemo da u modelu nije prisutna autokorelacija.	Uz 95 % vjerojatnosti prihvaćamo $H_A$ te zaključujemo da je u modelu prisutna pozitivna autokorelacija.	Uz 95 % vjerojatnosti prihvaćamo $H_0$ te zaključujemo da u modelu nije prisutna autokorelacija.

**ZADATAK 2.**

Prikupljeni su podaci o varijablama za uzorak od 50 država u SAD-u:

$PCON_i$  – potrošnja benzina u  $i$ -toj državi

$UHM_i$  – dužina autocesta u  $i$ -toj državi

$TAX_i$  – porezna stopa na benzin u  $i$ -toj državi

$REG_i$  – broj registriranih motornih vozila u  $i$ -toj državi, ( $i = 1, \dots, 50$ .)

Ocijenjen je linearni regresijski model potrošnje benzina:

$$PCON_i = \beta_0 + \beta_1 UHM_i + \beta_2 TAX_i + \beta_3 REG_i + u_i$$

i dobiveni su sljedeći rezultati:

REGRESS : dependent variable is PCON  
Using 1 - 50

Variable	Coefficient	StdErr	T-stat	Signf
^CONST	389.571	144.433	2.69725	.010
UHM	60.7587	10.2577	5.92322	.000
TAX	-36.4700	13.1546	-2.77241	.008
REG	-.611702E-01	.426939E-01	-1.43276	.159

```
----- Equation Summary -----
No. of Observations = 50      R2 = .9242 (adj) = .9192
Sum of Sq. Resid. = .170672E+07  Std. Error of Reg. = 192.620
Log (likelihood) = -331.898      Durbin-Watson = 2.20849
Schwarz Criterion = -339.722     F ( 3, 46) = 186.926
Akaike Criterion = -335.898     Significance = .000000
```

Correlation Matrix

	UHM	TAX	REG
UHM	1.00000	-.280851	.978638
TAX	-.280851	1.00000	-.242195
REG	.978638	-.242195	1.00000

a) Napišite kako glasi ocijenjena regresijska funkcija.

$$PCON_i = 389,571 + 60,7587UHM_i - 36,47TAX_i - 0,0611702REG_i$$

b) Vrsta podataka?

Vremenski presjek.

- c) Analizirajte ocijenjeni model (ekonomski kriteriji, statistički kriteriji) i navedite što možete navesti kao nedostatke modela.

U modelu nije ispunjen ekonomski kriterij jer predznak ispred 3. varijable (REG) nije u skladu s očekivanjima.

Također nije ispunjen ni statistički kriterij jer je  $R^2$  vrlo visok s obzirom da se radi o vremenskom presjeku te je t-vrijednost 2. varijable i 3. varijable vrlo niska ( $p > \alpha$  – nije značajan).

- d) Analizirajte matricu koeficijenta korelacije nezavisnih varijabli.

$r_{TAX/UHM} = -0,28085$  - nije značajan koeficijent korelacije  
- slaba povezanost među varijablama  
- negativna korelacija

$r_{TAX/UHM} = 0,97863$  - značajan koeficijent korelacije  
- izvrsna povezanost  
- pozitivna korelacija

$r_{TAX/UHM} = -0,242195$  - nije značajan koeficijent korelacije  
- nema povezanosti  
- negativna korelacija

0 do 0,25 0 do -0,25	nema povezanosti	0,25 do 0,50 -0,25 do -0,50	slaba povezanost	0,50 do 0,75 -0,50 do -0,75	umjerena do dobra povezanost	0,75 do 1 -0,75 do -1	izvrsna povezanost
-------------------------	---------------------	--------------------------------	---------------------	--------------------------------	------------------------------------	--------------------------	-----------------------

- e) Objasnite što sve upućuje na zaključak o prisustvu multikolinearnosti.

- visok koeficijent korelacije ( $r_{TAX/UHM} = 0,97863$ )
- niski t-testovi varijabli TAX i REG
- visoki  $R^2$
- predznak parametra  $\beta_3$  nije u skladu s očekivanjima.

- f) Kako bi mogli otkloniti multikolinearnost u ovom modelu?

Izbacivanjem varijable UHM koja je u visokoj korelaciji s varijablom koja ne ispunjava ekonomski kriterij te uzrokuje heteroskedastičnost.

REGRESS : dependentvariable is PCON  
Using 1 - 50

Variable	Coefficient	StdErr	T-stat	Signf
^CONST	551.688	186.271	2.96175	.005
TAX	-53.5910	16.8559	-3.17937	.003
REG	.186132	.117189E-01	15.8830	.000

----- EquationSummary -----  
 No. Of Observations = 50 R2= .8664 (adj)= .8607  
 Sum of Sq. Resid. = .300845E+07 Std. Error of Reg.= 253.001  
 Log(likelihood) = -346.070 Durbin-Watson = 2.19717  
 Schwarz Criterion = -351.938 F ( 2, 47) = 152.357  
 Akaike Criterion = -349.070 Significance = .000000

a) Da li su sada ispunjeni ekonomski i statistički kriteriji u modelu?

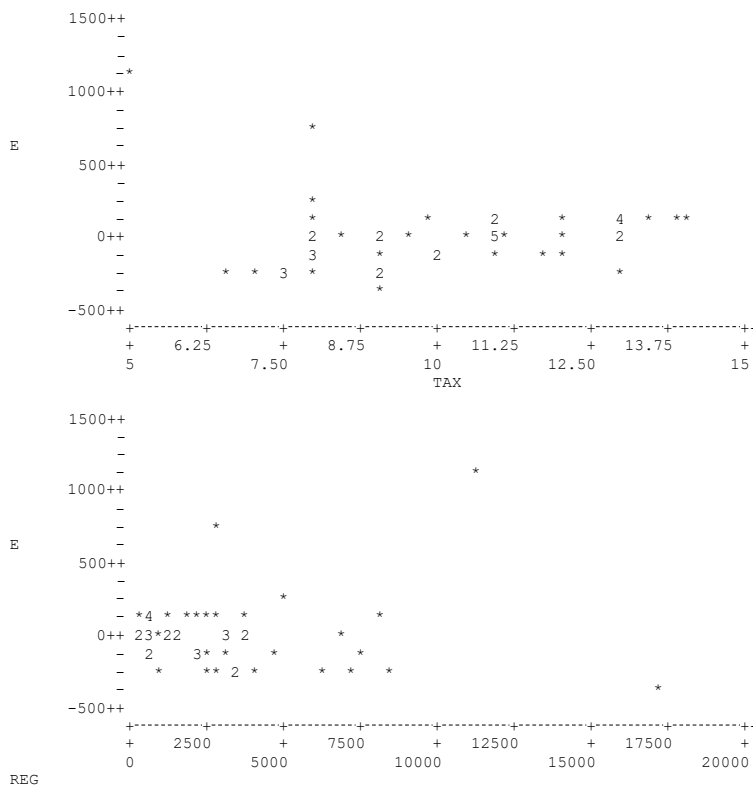
Da, izbacivanjem varijable UHM u modelu su ispunjeni ekonomski i statistički kriteriji. Varijabla REG je značajna za model ( $p < \alpha$ ).

b) Za koju nezavisnu varijablu smatrate da bi mogla uzrokovati heteroskedastičnost u ovom modelu?

Varijabla REG bi mogla uzrokovati heteroskedastičnost jer je t-vrijednost nerealno visoka kao i F-vrijednost modela.

c) Analizirajte ponašanje reziduala s obzirom na vrijednost pojedine nezavisne varijable.

Kod varijable REG reziduali pokazuju nesistemska odstupanja za različite vrijednosti nezavisne varijable, dok su odstupanja kod varijable TAX u pravilnom položaju (linearna zavisnost).



- d) Ispitajte prisustvo heteroskedastičnosti na koju sumnjate pomoću Park-testa (hipoteze, testiranje i zaključak, razina signifikantnosti 1%).

REGRESS : dependentvariable is LNE2  
Using 1 - 50

Variable	Coefficient	StdErr	T-stat	Signf
^CONST	1.65029	2.37447	.695016	.490
LNREG	.951916	.308304	3.08759	.003

1. HIPOTEZE:  $H_0: \sigma_1 = 0$

$H_A: \sigma_1 \neq 0$

2. TESTIRANJE:

$\alpha = 0,01$

$t_c = 2,704$

$n = 50$

$t_{\sigma_1} = 3,0875$

$k = 1$

$df = 48$

$|t_{\sigma_1}| > t_c$

$|3,0875| > 2,704 \rightarrow H_A$

$|t_{\sigma_1}| > t_c \rightarrow H_A$

$|t_{\sigma_1}| < t_c \rightarrow H_0$

3. ZAKLJUČAK: Uz 99 % vjerojatnosti prihvaćamo  $H_A$  te zaključujemo da je ovim testom utvrđena prisutnost heteroskedastičnosti u modelu.

## VJEŽBA ZA DOMA – PRIPREMA ZA ISPIT

Formiran je uzorak godišnjih podataka za razdoblje 1973 – 1990 godine za Hrvatsku, gdje su varijable:

- D – indeks potrošnje duhana u Hrvatskoj,  $D_{1973}=100$
- P – prosječna cijena cigareta u kunama, deflacionirana općim indeksom cijena na malo
- Z – broj stanovnika starosne dobi 20–65 godina
- X – prosječna mjesečna potrošena sredstva po jednom članu domaćinstva u kunama, deflacionirano indeksom troškova života na cijene 1973. godine
- Y – prosječni mjesečni osobni dohodak u kunama, deflacioniran indeksom troškova života na cijene 1973. godine

Ocijenjen je model oblika  $\ln D_t = \beta_0 + \beta_1 \ln P_t + \beta_2 \ln Z_t + \beta_3 \ln X_t + \beta_4 \ln Y_t + u_t$

REGRESS : dependentvariable is LND  
Using 1973 - 1990

Variable	Coefficient	StdErr	T-stat	Signf
^CONST	-35.2279	11.9507	-2.94777	.011
LNP	-.515002	.154825	-3.32634 ②	.005
LNZ	4.78048 ①	1.39649	3.42322	.005
LNX	-.231777	.128284	-1.80675	.094
LN Y	.564719	.233581	2.41765	.031 ③

Analysis of Variance

SOURCE	Sum of Squares	DF	Mean Sq Error	F Ratio / SIG(F)
Regression	.3252061			⑦
Residual				.00006
TOTAL				

----- Equation Summary -----  
 No. of Observations = 18 R2 = ⑤ (adj) = ⑥  
 Sum of Sq. Resid. = .661898E-01 Std. Error of Reg. = .713549E-01 ④  
 Log(likelihood) = 24.9095 Durbin-Watson = 2.09972 ⑧  
 Schwarz Criterion = 17.6836 F ( 3, 31) = ⑦  
 Akaike Criterion = 19.9095 Significance = .000062

- a) Interpretirajte vrijednost parametra pod ①
- b) Čemu služi pokazatelj pod ② (postavite hipoteze, provedite test uz signifikantnost 1%, izvedite zaključak)
- c) Obrazložite što znači pokazatelj označen sa ③
- d) Interpretirajte značenje pokazatelja pod ④
- e) Upotrijebite tablicu ANOVA
- f) Izračunajte i interpretirajte vrijednost pokazatelja pod ⑤
- g) Izračunajte vrijednost pokazatelja pod ⑥
- h) Izračunajte vrijednost pokazatelja pod ⑦ i provedite testiranje uz 1% signifikantnosti (hipoteze, testiranje i zaključak)
- i) Čemu služi pokazatelj pod ⑧ (postaviti hipoteze, provesti test uz 1% signifikantnosti, napisati zaključak)