

Financijska matematika - vježbe

Prudky, Ivan

Educational content / Obrazovni sadržaj

Publication status / Verzija rada: **Draft version / Radna verzija**

Publication year / Godina izdavanja: **2021**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:192:669038>

Rights / Prava: [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-21**



SVEUČILIŠTE U RIJECI
EKONOMSKI FAKULTET

Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of
Economics and Business - FECRI Repository](#)



Sveučilište u Rijeci, Ekonomski fakultet

Financijska matematika

VJEŽBE

Asistent: Ivan Prudky, ivan.prudky@gmail.com

Rijeka, 2021.

Vježbe: Jednostavni kamatni račun – kamatni račun od sto

1. Koliko iznose jednostavne kamate na glavnicu od 50.000,00 kn za razdoblje od tri godine i uz godišnji kamatnjak 8? Obračun kamata je dekurzivan.

$$C = 50.000 \text{ kn} \quad K = (C \times p(G) \times n)/100$$

$$n = 3 \text{ god} \quad K = (50.000 \times 8 \times 3)/100 = 12.000 \text{ kn}$$

$$p(G) = 8 \%$$

$$K = ?$$

2. Dužnik je vratio nakon jedne godine i šest mjeseci posuđeni iznos od 6.000,00 kn i jednostavne kamate u iznosu od 801,00 kn. Koliki je bio godišnji kamatnjak? Obračun kamata je dekurzivan.

$$C = 6.000 \text{ kn} \quad p(G) = (K \times 100)/(C \times n)$$

$$n = 1,5 \text{ god} \quad p(G) = (801 \times 100)/(6.000 \times 1,5) = 80.100/9.000 = 8,9 \%$$

$$K = 801 \text{ kn}$$

$$p(G) = ?$$

3. Uz koju se jednostavnu godišnju kamatu i dekurzivan obračun kamata neki iznos za 9 godina poveća 60 %? Obračun kamata je jednostavan i dekurzivan.

$$n = 9 \text{ god} \quad C_9 = 1,6 \times C = C + K = C + 0,6C$$

$$C = ? \quad p(G) = (K \times 100)/(C \times n) = (0,6C \times 100)/(C \times 9) =$$

$$K = ? \quad p(G) = 60C/9C = 60/9 = 6,67 \%$$

$$p(G) = ?$$

4. Uz koji godišnji kamatnjak neka glavnica za 10 godina učetverostruči svoju vrijednost? Obračun kamata je jednostavan i dekurzivan.

$$n = 10 \text{ god} \quad C_{10} = 4 \times C = C + K = C + 3C$$

$$C = ? \quad p(G) = (K \times 100)/(C \times n) = (3C \times 100)/(C \times 10) =$$

$$K = ? \quad p(G) = 300C/10C = 300/10 = 30 \%$$

$$p(G) = ?$$

5. Za koliko dana iznos od 85.000,00 kn, uz godišnji kamatnjak 6, donese 12.750,00 kn jednostavnih kamata? Obračun kamata je dekurzivan.

$$C = 85.000 \text{ kn} \quad d = (K \times 36.500)/(C \times p(G))$$

$$p(G) = 6 \% \quad d = (12.750 \times 36.500)/(85.000 \times 6) = 465.375.000/510.000 =$$

$$K = 12.750 \text{ kn} \quad d = 912,5 \approx 913 \text{ dana}$$

$$d = ? \quad n = d/365 = 913/365 = 2,5 \text{ godine}$$

6. Poduzeće je podiglo kratkoročni kredit za obrtna sredstva od 500.000,00 kn uz 8 % godišnjih kamata za vrijeme od 13.01. do 16.09. iste godine. Obračun kamata je dekurzivan. Koliko iznose jednostavne kamate prema:

a. engleskoj metodi;

$$C = 500.000 \text{ kn} \quad d = 18 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 16 = 246 \text{ dana}$$

$$p(G) = 8 \% \quad K = (C \times p(G) \times d)/36.500 = (500.000 \times 8 \times 246)/36.500 =$$

$$d = ? \quad K = 26.958,90 \text{ kn}$$

$$K = ?$$

b. njemačkoj metodi;

$$C = 500.000 \text{ kn} \quad d = 17 + 7 \times 30 + 16 = 243 \text{ dana}$$

$$p(G) = 8 \% \quad K = (C \times p(G) \times d)/36.000 = (500.000 \times 8 \times 243)/36.000 =$$

$$d = ? \quad K = 27.000 \text{ kn}$$

$$K = ?$$

c. francuskoj metodi?

$$C = 500.000 \text{ kn} \quad d = 18 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 16 = 246 \text{ dana}$$

$$p(G) = 8 \% \quad K = (C \times p(G) \times d)/36.000 = (500.000 \times 8 \times 246)/36.000 =$$

$$d = ? \quad K = 27.333,33 \text{ kn}$$

$$K = ?$$

Vježbe: Jednostavni kamatni račun; Kamatni račun više/niže sto

1. Zajam od 10.000,00 kn, odobren 15.05., dužnik je vratio zajedno s pripadajućim jednostavnim kamatama od 7 % godišnje, što je ukupno iznosilo 10.750,00 kn. Koje je datuma podmireno dugovanje ako je ukamaćivanje dekurzivno?

$$C = 10.000 \text{ kn} \quad d = (K \times 36.500)/(C \times p(G)) = (750 \times 36.500)/(10.000 \times 7) =$$

$$p(G) = 7 \% \quad d = 391,07 \approx 392 \text{ dana}$$

$$C + K = 10.750 \text{ kn} \quad d_1 \rightarrow 15.05. \text{ Datum: } 11.06. \text{ iduće godine}$$

$$K = 750 \text{ kn}$$

$$d = ?$$

2. Nakon odbitka 5 % kamata od zajma za razdoblje od 01.03. do 30.04. banka je isplatila dužniku ostatak od 50.450,00 kn. Koliko su iznosile jednostavne kamate ako je obračun bio godišnji i dekurzivan?

$$p(G) = 5 \quad K = ((C - K) \times p(G) \times d)/(36.500 - p(G) \times d) =$$

$$d = 30 + 30 = 60 \quad K = (50.450 \times 5 \times 60)/(36.500 - 5 \times 60) =$$

$$C - K = 50.450 \text{ kn} \quad K = 15.135.000/36.200 =$$

$$K = ? \quad K = 418,09 \text{ kn}$$

3. Koliki će iznos kamata Marija dobiti ako su na štednoj knjižici ispisani slijedeći podaci:

DATUM	ISPLATA	UPLATA	STANJE
10.01.		3.000,00	3.000,00
23.01.	1.250,00		1.750,00
08.02.		4.500,00	6.250,00
16.02.	1.750,00		4.500,00
05.03.		1.000,00	5.500,00
17.03.	500,00		5.000,00

Kamatna stopa je 5 %.

A) Obračun razlike u kamatama za pojedinačne uplate i isplate

Obračun kamata na sve uplate:

$$K_{U1} = \frac{3.000 \times 5 \times 355}{36.500} = \frac{5.325.000}{36.500} = 145,89 \text{ kn}$$

$$K_{U2} = \frac{4.500 \times 5 \times 326}{36.500} = \frac{7.335.000}{36.500} = 200,96 \text{ kn}$$

$$K_{U3} = \frac{1.000 \times 5 \times 301}{36.500} = \frac{1.565.000}{36.500} = 41,23 \text{ kn}$$

$$K_U = K_{U1} + K_{U2} + K_{U3} = 145,89 + 200,96 + 41,23 = \mathbf{388,08 \text{ kn}}$$

Obračun kamata na sve isplate:

$$K_{I1} = \frac{1.250 \times 5 \times 342}{36.500} = \frac{2.137.500}{36.500} = 58,56 \text{ kn}$$

$$K_{I2} = \frac{1.750 \times 5 \times 318}{36.500} = \frac{2.782.500}{36.500} = 76,23 \text{ kn}$$

$$K_{I3} = \frac{500 \times 5 \times 289}{36.500} = \frac{752.500}{36.500} = 19,79 \text{ kn}$$

$$K_I = K_{I1} + K_{I2} + K_{I3} = 58,56 + 76,23 + 19,79 = \mathbf{154,58 \text{ kn}}$$

Konačna vrijednost kamata:

$$K = K_U - K_I = \mathbf{388,08 - 154,58 = 233,50 \text{ kn}}$$

B) Obračun kamata na pojedina stanja računa

$$K_1 = \frac{3.000 \times 5 \times 13}{36.500} = 5,34 \text{ kn}$$

$$K_2 = \frac{1.750 \times 5 \times 16}{36.500} = 3,84 \text{ kn}$$

$$K_3 = \frac{6.250 \times 5 \times 8}{36.500} = 6,85 \text{ kn}$$

$$K_4 = \frac{4.500 \times 5 \times 17}{36.500} = 10,48 \text{ kn}$$

$$K_5 = \frac{5.500 \times 5 \times 12}{36.500} = 9,04 \text{ kn}$$

$$K_6 = \frac{5.000 \times 5 \times 289}{36.500} = 197,95 \text{ kn}$$

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6$$

$$K = \mathbf{5,34 + 3,84 + 6,85 + 10,48 + 9,04 + 197,95 = 233,50 \text{ kn}}$$

4. Koliki će iznos kamata Marko dobiti ako su na štednoj knjižici, uz kamatu od 4 %, ispisani slijedeći podaci:

DATUM	ISPLATA	UPLATA	STANJE
28.01.		6.000,00	6.000,00
04.02.	1.500,00		4.500,00
13.03.		3.500,00	8.000,00
22.03.	2.500,00		5.500,00

26.04.		8.000,00	13.500,00
06.05.		5.000,00	18.500,00
14.06.	4.250,00		14.250,00
30.06.		1.350,00	15.600,00
23.07.	2.225,00		13.375,00
16.08.		6.000,00	19.375,00

A) Obračun razlike u kamatama za pojedinačne uplate i isplate

$$K_{U1} = 221,59 \text{ kn}$$

$$K_{I1} = 54,25 \text{ kn}$$

$$K_{U2} = 112,38 \text{ kn}$$

$$K_{I2} = 77,81 \text{ kn}$$

$$K_{U3} = 218,30 \text{ kn}$$

$$K_{I3} = 93,15 \text{ kn}$$

$$K_{U4} = 130,96 \text{ kn}$$

$$K_{I4} = 39,26 \text{ kn}$$

$$K_{U5} = 27,22 \text{ kn}$$

$$K_I = 264,47 \text{ kn}$$

$$K_{U6} = 90,08 \text{ kn}$$

$$K_U = 800,53 \text{ kn}$$

$$K = K_U - K_I = 800,53 - 264,47 = 536,06 \text{ kn}$$

B) Obračun kamata na pojedina stanja računa

$$K_1 = 4,60 \text{ kn}$$

$$K_6 = 79,07 \text{ kn}$$

$$K_2 = 18,25 \text{ kn}$$

$$K_7 = 24,99 \text{ kn}$$

$$K_3 = 7,89 \text{ kn}$$

$$K_8 = 39,32 \text{ kn}$$

$$K_4 = 21,10 \text{ kn}$$

$$K_9 = 35,18 \text{ kn}$$

$$K_5 = 14,79 \text{ kn}$$

$$K_{10} = 290,89 \text{ kn}$$

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 + K_7 + K_8 + K_9 + K_{10} = 536,08 \text{ kn}$$

5. Mjenica glasi na 150.000,00 kn te dospijeva 24. lipnja. Kolika je njezina vrijednost, ako je godišnji kamatnjak 6:

a. 14. svibnja iste godine;

$$C = 150.000 \text{ kn}$$

$$p(G) = 6$$

$$d = 41$$

$$Ka = \frac{150.000 \times 6 \times 41}{36.500} = 1.010,96 \text{ kn}$$

$$SV: 150.000 - 1.010,96 = \underline{\underline{148.989,04 \text{ kn}}}$$

b. 1. srpnja iste godine?

$$C = 150.000 \text{ kn}$$

$$p(G) = 6$$

$$d = 7$$

$$Kb = \frac{150.000 \times 6 \times 7}{36.500} = 172,60 \text{ kn}$$

$$SV: 150.000 + 172,60 = \mathbf{150.172,60 \text{ kn}}$$

6. Obračunajte prodaju mjenice na iznos od 50.000,00 kn plativu 25. ožujka 2020. koju je poduzeće prodalo banci 13. veljače uz 7,5 % diskonta, 3 ‰ provizije i 43,50 kn troškova.

$$C = 50.000 \text{ kn} \quad K = ? \quad K \rightarrow \text{iznos kamate}$$

$$p(G) = 7,5 \quad S = ? \quad S \rightarrow \text{diskontirana vrij. mjenice}$$

$$d = 41 \quad P = ? \quad P \rightarrow \text{provizija (u promilima)}$$

$$K = \frac{50.000 \times 7,5 \times 41}{36.600} = 420,08$$

$$S = 50.000 - 420,08 = 49.579,92$$

$$P = \frac{S \times p(S)}{1.000} = \frac{49.579,92 \times 3}{1.000} = 148,74$$

a) Nominalni iznos mjenice (C)	50.000,00
b) Iznos kamata (diskont 7,5 %) (K)	420,08
c) Diskontirana vrijednost mjenice (S) (a - b)	49.579,92
d) Iznos provizije (3 promila na diskontiranu vrijednost) (P)	148,74
e) Obračunati troškovi (bankarski)	43,50
f) Vrijednost mjenice (c - d - e)	49.387,68

Prilikom prodaje osoba će uprihoditi 49.387,68 kn.

7. Tri mjenice glase:

a. 22.000,00 kn s dospeljećem 3.3. i ukamaćivanjem 4,5 % godišnje,

b. 26.000,00 kn s dospeljećem 4.4. i ukamaćivanjem 5,25 % godišnje,

c. 30.000,00 kn s dospeljećem 5.5. i ukamaćivanjem 7,5 % godišnje.

Mjenice se zamjenjuju novom koja je jednaka zbroju njihovih nominalnih iznosa. Potrebno je odrediti datum dospeljeća nove mjenice.

22.000 kn 3.3. – 3.3. 0 dana 4,5 %

26.000 kn 3.3. – 4.4. 32 dana 5,25 %

30.000 kn 3.3. – 5.5. 63 dana 7,5 %

$d = ?$

$$d = \frac{C_1 \times p_1(G) \times d_1 + C_2 \times p_2(G) \times d_2 + C_3 \times p_3(G) \times d_3}{C_1 \times p_1(G) + C_2 \times p_2(G) + C_3 \times p_3(G)} =$$

$$d = \frac{22.000 \times 4,5 \times 0 + 26.000 \times 32 \times 5,25 + 30.000 \times 7,5 \times 63}{22.000 \times 4,5 + 26.000 \times 5,25 + 30.000 \times 7,5} =$$

$$d = \frac{18.543.000}{460.500} = 40,27 \approx 41$$

Novi datum dospijeća mjenice je 13.04.

8. Četiri mjenice glase na:

- a. 5.000,00 kn s dospijećem 02.01.,
- b. 6.000,00 kn s dospijećem 03.02.,
- c. 7.000,00 kn s dospijećem 04.03.,
- d. 8.000,00 kn s dospijećem 05.04.,

koje je potrebno zamijeniti s novom mjenicom s dospijećem 19.03. iste godine. Koji će nominalni iznos biti na novoj mjenici, ako je godišnji diskont 10 %?

$p(G) = 10$

$d_1 = 77$ dana $d_2 = 45$ dana $d_3 = 15$ dana $d_4 = 16$ dana

$$X = 5.000 + \frac{5.000 \times 10 \times 77}{36.500} + 6.000 + \frac{6.000 \times 10 \times 45}{36.500} + 7.000 + \frac{7.000 \times 10 \times 15}{36.500} + 8.000 - \frac{8.000 \times 10 \times 16}{36.500} =$$

$$X = 5.105,48 + 6.073,97 + 7.028,77 + 7.964,93 = \mathbf{26. 173, 15 \text{ kn}}$$

9. Obračunajte prodaju mjenice na iznos od 35.750,00 kn plativu 26. travnja koju je poduzeće prodalo banci 9. veljače uz 3,75 % diskonta, 4,5 ‰ provizije i 50,00 kn troškova.

$C = 37.500$ kn

$K = ?$

$K \rightarrow$ iznos kamate

$p(G) = 3,75$

$S = ?$

$S \rightarrow$ diskontirana vrij. mjenice

$d = 20 + 31 + 26 = 77$

$P = ?$

$P \rightarrow$ provizija (u promilima)

$$K = \frac{35.750 \times 3,75 \times 77}{36.500} = 282,82$$

$$S = 35.750 - 282,82 = 35.467,18$$

$$P = \frac{S \times p(S)}{1.000} = \frac{35.467,18 \times 4,5}{1.000} = 159,60$$

a) Nominalni iznos mjenice (C)	35.750,00
b) Iznos kamata (diskont 3,75 %) (K)	282,82
c) Diskontirana vrijednost mjenice (S) (a - b)	35.467,18
d) Iznos provizije (4,5 promila na diskontiranu vrijednost) (P)	159,60
e) Obračunati troškovi (bankarski)	50,00
f) Vrijednost mjenice (c - d - e)	35.257,58

Prilikom prodaje osoba će uprihoditi 35.257,58 kn.

10. Tri mjenice glase na:

- a. 12.250,00 kn s dospeljećem 04.02.,
- b. 13.750,00 kn s dospeljećem 06.05.,
- c. 15.000,00 kn s dospeljećem 14.06.,

koje je potrebno zamijeniti s novom mjenicom s dospeljećem 26.04. iste godine. Koji će nominalni iznos biti na novoj mjenici, ako je godišnji diskont 5 %?

$$p(G) = 5$$

$$d_1 = 82 \text{ dana}$$

$$d_2 = 10 \text{ dana}$$

$$d_3 = 49 \text{ dana}$$

$$X = 12.250 + \frac{12.250 \times 5 \times 82}{36.500} + 13.750 - \frac{13.750 \times 5 \times 10}{36.500} + 15.000 - \frac{15.000 \times 5 \times 49}{36.500}$$

$$X = 12.387,60 + 13.731,16 + 14.899,32 = \mathbf{41.018,08 \text{ kn}}$$

Vježbe: Složeni kamatni račun – dekurzivno ukamaćivanje; Relativni i konformni kamatnjak

1. Iznos od 10.000,00 kn uložen je na 5 godina uz složenu, godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 4,5 %. Izračunajte konačni iznos glavnice.

$$C_0 = 10.000 \text{ kn} \quad C_n = C_0 \times r^n \quad r = 1 + p/100 \quad r = 1,045$$

$$n = 5 \text{ god}$$

$$p = 4,5 \% \quad C_n = 10.000 \times 1,045^5 = \mathbf{12.461,82 \text{ kn}}$$

$$C_n = ?$$

$$I = ? \quad I = C_n - C_0 = 12.461,82 - 10.000 = \mathbf{2.461,82 \text{ kn}}$$

2. Jedan štediša uložio je u banku danas 80.000,00 kn. banka odobrava 7,5 % godišnjih kamata. Kolikim će iznosom raspolagati na kraju 6. godine ako je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan?

$$C_0 = 80.000 \text{ kn} \quad C_n = C_0 \times r^n \quad r = 1 + p/100 \quad r = 1,075$$

$$p = 7,5 \%$$

$$n = 6 \text{ god} \quad C_n = 80.000 \times 1,075^6 = \mathbf{123.464,12 \text{ kn}}$$

$$C_n = ?$$

3. Ulagrač je danas oročio u banci 800.000,00 kn. banka u tom slučaju odobrava 10 % godišnjih kamata. Kolikim će iznosom raspolagati na kraju 5. godine ako je obračun kamata dekurzivan, godišnji i složen?

$$C_0 = 800.000 \text{ kn} \quad C_n = C_0 \times r^n \quad r = 1 + p/100 \quad r = 1,1$$

$$p = 10 \%$$

$$n = 5 \text{ god} \quad C_n = 800.000 \times 1,1^5 = \mathbf{1.288.408 \text{ kn}}$$

$$C_n = ?$$

4. Za koje se vrijeme neka glavnica poveća zajedno sa složenom kamatom za 250 % ako se kamate obračunavaju uz godišnji kamatnjak od 7,5? Obračun kamata je dekurzivan, godišnji i složen.

$$p = 7,5 \% \quad C_n = C_0 \times r^n \quad d = 0,67 \times 365 = 244,54$$

$$C_n = 2,5 C_0 \quad 2,5 C_0 = C_0 \times 1,075^n \quad d = 244,54 \approx 245 \text{ dana}$$

$$n = ? \quad 2,5 = 1,075^n / \ln$$
$$\ln 2,5 = n \ln 1,075 / \ln 1,075$$
$$n = \frac{\ln 2,5}{\ln 1,075} = 12,67 \text{ god}$$

5. Štediša je danas uložio u banku 40.000,00 kn. kolikim će iznosom raspolagati na kraju 6. godine ako banka prve tri godine odobrava kamatnjak od 7,5 %, a zadnje tri godine kamatnjak u visini 10 % godišnjih kamata. Obračun kamata je dekurzivan, godišnji i složen.

$$C_0 = 40.000 \text{ kn} \quad C_6 = C_0 \times r_1^3 \times r_2^3$$
$$n = 6 \quad C_6 = 40.000 \times 1,075^3 \times 1,1^3$$
$$p_1 = 7,5 \% \rightarrow n_1 = 3 \quad C_6 = \mathbf{66.139,89 \text{ kn}}$$
$$p_2 = 10 \% \rightarrow n_2 = 3$$
$$C_n = ?$$

6. Koji iznos uloženi danas u banku naraste za 10 godina zajedno sa složenim kamatama na 65.000,00 kn? Banka obračunava 7,5 % godišnjih kamata dekurzivno.

$$n = 10 \text{ god} \quad C_n = C_0 \times r^n$$
$$C_n = 65.000 \text{ kn} \quad 65.000 = C_0 \times 1,075^{10}$$
$$p = 7,5 \% \quad C_0 = \frac{65.000}{1,075^{10}} = \mathbf{31.537,61 \text{ kn}}$$
$$C_0 = ?$$

7. Koji iznos uloženi danas u banku donese za 8 godina iznos od 90.000,00 kn sa složenim kamata? Banka obračunava prve dvije godine 6 %, a preostalo razdoblje 7 % godišnjih kamata dekurzivno.

$$n = 8 \text{ god} \quad C_n = C_0 \times r^n$$
$$C_n = 90.000 \text{ kn} \quad C_n = C_0 \times r_1^n \times r_2^n$$
$$p_1 = 6 \% \rightarrow n_1 = 2 \quad 90.000 = C_0 \times 1,06^2 \times 1,07^6$$
$$p_2 = 7 \% \rightarrow n_2 = 6 \quad C_0 = \frac{90.000}{1,68622062} = \mathbf{53.373,80 \text{ kn}}$$
$$C_0 = ?$$

8. Koliko je kn uloženo prije 10 godina, ako je danas ostalo na štednoj knjižici 30.000,00 kn, a prije 5 godina podignuto je 20.000,00 kn? Banka je, uz složeni, godišnji i dekurzivni obračun, obračunavala:

a. kroz čitavo vrijeme 7,5 % godišnjih kamata.

$$\begin{aligned} n &= 10 \text{ god} & C_n &= C_0 \times r^{10} - 20.000 \times r^5 \\ C_n &= 30.000 \text{ kn} & 30.000 &= C_0 \times 1,075^{10} - 20.000 \times 1,075^5 \\ u \text{ n5} &\rightarrow -20.000 \text{ kn} & 30.000 &= 2,061031056C_0 - 28.712,59 \\ p &= 7,5 \% & 58.712,59 &= 2,061031056C_0 \\ C_0 &=? & C_0 &= \mathbf{28.483,13 \text{ kn}} \end{aligned}$$

b. prvih 5 godina 7,5 %, a posljednjih 5 godina 8 % godišnjih kamata.

$$\begin{aligned} n &= 10 \text{ god} & C_n &= C_0 \times r_1^5 \times r_2^5 - 20.000 \times r_2^5 \\ C_n &= 30.000 \text{ kn} & 30.000 &= C_0 \times 1,075^5 \times 1,08^5 - 20.000 \times 1,08^5 \\ u \text{ n5} &\rightarrow -20.000 \text{ kn} & 30.000 &= 2,10941048C_0 - 29.386,56 \\ p_1 &= 7,5 \% \rightarrow n_1 = 5 & 59.386,56 &= 2,10941048C_0 \\ p_2 &= 8 \% \rightarrow n_2 = 5 & C_0 &= \mathbf{28.153,15 \text{ kn}} \\ C_0 &=? \end{aligned}$$

9. Odredite konačnu vrijednost uloga od 50.000,00 kn nakon 8 godina uz nominalni godišnji kamatnjak $p = 12 \%$, ako se kamata vrši:

a. godišnje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 50.000,00 \text{ kn} & m &= \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1} = 1 & p_r &= \frac{p}{m} = \frac{12}{1} = 12 \% \\ n &= 8 \text{ god} \\ p &= 12 \% & C_n &= C_0 \times r^{n \times m} \\ n_1 &= 1 \text{ god} & C_n &= 50.000 \times 1,12^8 = \mathbf{123.798,16 \text{ kn}} \\ n_2 &= 1 \text{ god} \end{aligned}$$

b. polugodišnje uz primjenu relativne kamatne stope.

$$\begin{aligned} C_0 &= 50.000,00 \text{ kn} & m &= \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1/2} = 2 & p_r &= \frac{p}{m} = \frac{12}{2} = 6 \% \\ n &= 8 \text{ god} & C_n &= C_0 \times r^{n \times m} \\ p &= 12 \% & C_n &= 50.000 \times 1,06^{8 \times 2} = \mathbf{127.017,5816 \text{ kn}} \\ n_1 &= 1 \text{ god} \\ n_2 &= 1 \text{ polugod} \end{aligned}$$

c. dvomjesečno uz primjenu relativne kamatne stope.

$$\begin{aligned} C_0 &= 50.000,00 \text{ kn} & m &= \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1/6} = 6 & p_r &= \frac{p}{m} = \frac{12}{6} = 2 \% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n &= 8 \text{ god} & C_n &= C_0 \times r^{n \times m} \\p &= 12 \% & C_n &= 50.000 \times 1,02^{8 \times 6} = \mathbf{129.353,52 \text{ kn}} \\n_1 &= 1 \text{ god} \\n_2 &= 2 \text{ mj}\end{aligned}$$

10. Odredite konačnu vrijednost uloga od 20.000,00 kn nakon 4 godine uz zadani mjesečni kamatnjak od 1,5 %, ako je kapitalizacija:

a. mjesečna.

$$\begin{aligned}C_0 &= 20.000 \text{ kn} & m &= \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1} = 1 & p_r &= \frac{p}{m} = \frac{1,5}{1} = 1,5 \% \\n &= 4 \text{ god} \rightarrow 48 \text{ mj} & C_n &= C_0 \times r^{n \times m} \\p &= 1,5 \% & C_n &= 20.000 \times 1,015^{48} = \mathbf{40.869,57 \text{ kn}} \\n_1 &= 1 \text{ mj} \\n_2 &= 1 \text{ mj}\end{aligned}$$

b. dvomjesečna.

$$\begin{aligned}C_0 &= 20.000 \text{ kn} & m &= \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2} = 1/2 & p_r &= \frac{p}{m} = \frac{1,5}{1/2} = 3 \% \\n &= 4 \text{ god} \rightarrow 48 \text{ mj} & C_n &= C_0 \times r^{n \times m} \\p &= 1,5 \% & C_n &= 20.000 \times 1,03^{48 \times 1/2} = \mathbf{40.655,88 \text{ kn}} \\n_1 &= 1 \text{ mj} \\n_2 &= 2 \text{ mj}\end{aligned}$$

c. polugodišnja.

$$\begin{aligned}C_0 &= 20.000 \text{ kn} & m &= \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{6} = 1/6 & p_r &= \frac{p}{m} = \frac{1,5}{1/6} = 9 \% \\n &= 4 \text{ god} \rightarrow 48 \text{ mj} & C_n &= C_0 \times r^{n \times m} \\p &= 1,5 \% & C_n &= 20.000 \times 1,09^{48 \times 1/6} = \mathbf{39.851,25 \text{ kn}} \\n_1 &= 1 \text{ mj} \\n_2 &= 6 \text{ mj}\end{aligned}$$

11. Odredite na koju vrijednost nakon 6 godina naraste iznos od 50.000,00 kn koji je uložen na banci uz 2 % polugodišnjih kamata.

$$\begin{aligned}n &= 6 \text{ godina} \rightarrow 12 \text{ polugodišta} & C_n &= C_0 \times r^n \\C_0 &= 5.000 \text{ kn} & C_n &= 5.000 \times 1,02^{12} \\p &= 2 \% \text{ (polugodišnje)} & C_n &= \mathbf{6.341,21 \text{ kn}} \\C_n &= ?\end{aligned}$$

- a. Izračunajte komforni mjesečni kamatnjak i provjerite da li uz njegovu primjenu mjesečni pripis kamatama dobivamo istu vrijednost.

$$n_1 = 6 \text{ mj. (polugodišnja kamata)} \quad m = 6/1 = 6$$

$$n_2 = 1 \text{ mj. (mjesečni kamatnjak)} \quad p' = 100 \times \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right]$$

$$p' = ? \quad p' = 100 \times \left[\left(1 + \frac{2}{100}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 \right] = 0,330589 \text{ (mj.)}$$

$$r' = 1 + \frac{p'}{100} = 1,00330589$$

$$n = 6 \text{ god.} \rightarrow 72 \text{ mj.} \quad C_n = 5.000 \times 1,00330589^{72} = \mathbf{6.341,21 \text{ kn}}$$

- b. Koliki bi bio odgovarajući kamatnjak koji bi davao istu količinu kamata?

$$n_1 = 6 \text{ mj. (polugodišnja kamata)} \quad m = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1/2$$

$$n_2 = 1 \text{ god. (kamatnjak)} \quad p' = 100 \times \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right]$$

$$p' = ? \quad p' = 100 \times \left[\left(1 + \frac{2}{100}\right)^{\frac{1}{1/2}} - 1 \right] = 4,04 \text{ (god.)}$$

$$r' = 1 + \frac{p'}{100} = 1,0404$$

$$n = 6 \text{ god.} \quad C_n = 5.000 \times 1,0404^6 = \mathbf{6.341,21 \text{ kn}}$$

12. Danas je neki štediša oročio u banci 80.000,00 kn. Kolikim će iznosom raspolagati na kraju 6. godine ako prve dvije godine banka odobrava 6 %, a ostale godine 8 % godišnjih kamata. Obračun kamata je složen, polugodišnji i dekurzivan.

$$C_0 = 80.000 \text{ kn} \quad m = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$n = 6 \text{ god} \quad p_{r1} = 6/2 = 3 \% \quad p_{r2} = 8/2 = 4 \%$$

$$p_1 = 6 \rightarrow n = 2 \quad C_n = 80.000 \times 1,03^4 \times 1,04^8 = \mathbf{123.226,92 \text{ kn}}$$

$$p_2 = 8 \rightarrow n = 4$$

$$p'_1 = 100 \times \left[\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = 2,956301$$

$$n_1 = 1 \text{ god.} \quad p'_2 = 100 \times \left[\left(1 + \frac{8}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = 3,923048$$

$$n_2 = 1 \text{ polugod.} \quad C_n = 80.000 \times 1,029 \dots^4 \times 1,039 \dots^8 = \mathbf{122.291,63 \text{ kn}}$$

13. Prije jedne godine od danas uloženo je u banku 45.000,00 kn. Koliko bi trebalo uplatiti danas da se nakon 5 godina želi podići 500.000,00 kn? Obračun kamata je polugodišnji i dekurzivan, a banka odobrava godišnji kamatnjak 5 (koristite relativni kamatnjak).

$$C_0 - 1 = 45.000 \text{ kn} \quad m = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$C_0 = ? \quad p_r = 5/2 = 2,5 \% \quad \rightarrow \quad r = 1,025$$

$$C_n = 500.000 \text{ kn} \quad 500.000 = C_0 \times 1,025^{10} + 45.000 \times 1,025^{12}$$

$$p = 5 \quad 500.000 - 60.520 = 1,28008454C_0 \quad / : 1,28008454$$

$$n = 5 \text{ god} \quad C_0 = \mathbf{343.321,08 \text{ kn}}$$

$$n_1 = 1 \text{ god.}$$

$$n_2 = 1 \text{ polugod.}$$

Vježbe: Konačne vrijednosti više periodičnih uplata / isplata

1. Osoba ulaže u banku početkom svake godine po 15.000,00 kn kroz 5 godina. Ako je godišnji kamatnjak 7 %, kolika je konačna vrijednost svih uplata na kraju 5. godine, a kolika na kraju 8. godine? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

$$R = 15.000 \text{ kn} \quad S_5 = R \times r \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = 15.000 \times 1,07 \times \frac{1,07^5 - 1}{1,07 - 1}$$

$$n = 5 \text{ god.} \quad S_5 = \mathbf{92.299,36 \text{ kn}}$$

$$p = 7 \% \rightarrow r = 1,07$$

$$S_8 = ? \quad C_8 = S_5 \times r^3 = 92.299,36 \times 1,07^3$$

$$C_8 = ? \quad C_8 = \mathbf{113.070,69 \text{ kn}}$$

2. Neka osoba početkom svake godine u prve tri godine uplaćuje po 10.000,00 kn uz 10 % godišnje kamatne stope, a u daljnjih sedam godina po 15.000,00 kn uz 8 % godišnje kamatne stope. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju petnaeste godine ako se i dalje primjenjuje godišnja kamatna stopa od 8 %?

$$n_1 = 3 \text{ god.} \quad S_3 = R \times r \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = 10.000 \times 1,1 \times \frac{1,1^3 - 1}{1,1 - 1}$$

$$R_1 = 10.000 \text{ kn} \quad S_3 = 36.410 \text{ kn}$$

$$p_1 = 10 \% \rightarrow r_1 = 1,1$$

$$n_2 = 7 \text{ god} \quad S_7 = R \times r \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = 15.000 \times 1,08 \times \frac{1,08^7 - 1}{1,08 - 1}$$

$$R_2 = 15.000 \text{ kn} \quad S_7 = 144.549,42 \text{ kn}$$

$$p_2 = 8 \% \rightarrow r_2 = 1,08$$

$$C_{15} = ? \quad C_{15} = S_3 \times r^{12} + S_7 \times r^5$$

$$C_{15} = 36.410 \times 1,08^{12} + 144.549,42 \times 1,08^5$$

$$C_{15} = 91.686,57 + 212.390,52 = \mathbf{304.077,09 \text{ kn}}$$

3. Osoba ulaže u banku na ime stambene štednje krajem svakog mjeseca po 500,00 kn. Koliku će svotu ta osoba imati u banci na kraju 10. godine ako joj se u tom trenutku uplate i državna poticajna sredstva od 1.250,00 kn? Mjesečni kamatnjak je 1,25 %, a obračun kamata mjesečni, složen i dekurzivan?

$$R = 500 \text{ kn} \quad S'_{10} = R \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = 500 \times \frac{1,0125^{120} - 1}{1,0125 - 1}$$

$$n = 10 \text{ god.} \rightarrow 120 \text{ mj.} \quad S'_{10} = 137.608,53 \text{ kn} + 1.250 \text{ kn} = \mathbf{138.858,53 \text{ kn}}$$

$$C = 1.250 \text{ kn}$$

$$p = 1,25 \% \rightarrow r = 1,0125$$

$$S'_n + C = ?$$

4. Osoba treba na kraju pete godine platiti iznos od 30.000,00 kn. U dogovoru s vjerovnikom dužnik se obvezao da će krajem svake godine kroz pet godina uplaćivati određenu svotu. Koja je to svota ako vjerovnik traži 8 % godišnjih kamata, a obračun je godišnji, složen i dekurzivan?

$$S'_n = 30.000 \text{ kn} \quad S'_n = R \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$n = 5 \text{ god.} \quad 30.000 = R \times \frac{1,08^5 - 1}{1,08 - 1}$$

$$p = 8 \% \rightarrow r = 1,08 \quad 30.000 = 5,866601 R \quad / : 5,86 \dots$$

$$R = ? \quad R = \mathbf{5.113,69 \text{ kn}}$$

5. U banku je uloženo 100.000,00 kn da bi se sljedećih 10 godina moglo krajem godine podizati po 12.000,00 kn. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivni, uz godišnji kamatnjak 10 %. Koliki će iznos biti na računu u banci na kraju desete godine?

$$C_0 = 100.000 \text{ kn} \quad C = C_0 \times r^n - R \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$n = 10 \text{ god.} \quad C = 100.000 \times 1,1^{10} - 12.000 \times \frac{1,1^{10} - 1}{1,1 - 1}$$

$$R = 12.000 \text{ kn} \quad C = 259.374,25 - 191.249,10$$

$$p = 10 \% \rightarrow r = 1,1 \quad C = \mathbf{68.125,15 \text{ kn}}$$

$$C = ?$$

6. Neka je osoba uplaćivala u banku početkom svake godine po 5.000,00 eura kroz 5 godina. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju desete godine ako je banka prve tri godine primjenjivala kamatnu stopu 6 %, u preostalom razdoblju 5 % i ako je osoba u sedmoj godini podigla iznos od 10.000,00 eura?

$$R = 5.000 \text{ kn} \rightarrow n = 5 \text{ god} \quad C_{10} = S_3 \times r^7 + S_2 \times r^5 - C \times r^3$$

$$n = 10 \text{ god} \quad C_{10} = \left(5.000 \times 1,06 \times \frac{1,06^3 - 1}{1,06 - 1} \right) \times 1,05^7 +$$

$$p_1 = 6 \% \rightarrow n = 3 \text{ god} \quad + \left(5.000 \times 1,05 \times \frac{1,05^2 - 1}{1,05 - 1} \right) \times 1,05^5 -$$

$$p_2 = 5 \% \rightarrow n = 7 \text{ god} \quad - 10.000 \times 1,05^3 =$$

$$C_{10} = 23.742,12 + 13.735,98 - 11.576,25 =$$

$$C = 10.000 \text{ kn u 7. godini} \quad C_{10} = \mathbf{25.901,85 \text{ kn}}$$

7. Štediša ulaže:

- a. početkom svake godine,
- b. krajem svake godine,

kroz 6 godina u banku po 5.000,00 kn. Koliko će imati u banci na kraju 6. godine, ako je obračun kamata složen godišnji i dekurzivan, a kamatna stopa iznosi 4 %.

- a. početkom svake godine:

$$n = 6 \text{ god.} \quad S_n = R \times r \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$R = 5.000 \text{ kn} \quad S_6 = 5.000 \times 1,04 \times \frac{1,04^6 - 1}{1,04 - 1}$$

$$p = 4 \% \rightarrow r = 1,04 \quad S_6 = \mathbf{34.491,47 \text{ kn}}$$

$$S_6 = ?$$

- b. krajem svake godine:

$$n = 6 \text{ god.} \quad S'_n = R \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$R = 5.000 \text{ kn} \quad S'_6 = 5.000 \times \frac{1,04^6 - 1}{1,04 - 1}$$

$$p = 4 \% \rightarrow r = 1,04 \quad S'_6 = \mathbf{33.164,88 \text{ kn}}$$

$$S'_6 = ?$$

Vježbe: Početna (sadašnja) vrijednost više periodičnih uplata / isplata

1. Koliki iznos valja uložiti danas da se osigura pet godišnjih postnumerando isplata po 30.000,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan, uz godišnji kamatnjak od 5 %.

$$R = 30.000 \text{ kn} \quad A_n = R \times \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

$$n = 5 \text{ god.} \quad A_n = 30.000 \times \frac{1,05^5 - 1}{1,05^5(1,05 - 1)}$$

$$p = 5 \% \rightarrow r = 1,05 \quad A_n = 30.000 \times 4,32947663$$

$$A_n = ? \quad A_n = \mathbf{129.884,30 \text{ kn}}$$

2. Koliki se jednaki godišnji iznosi mogu podizati potkraj svake godine, tijekom iduće 4 godine, na temelju uloženog iznosa od 60.000,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan, uz godišnji kamatnjak od 3,5 %.

$$n = 4 \text{ god} \quad A_n = R \times \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

$$A_n = 60.000 \text{ kn} \quad 60.000 = R \times \frac{1,035^4 - 1}{1,035^4(1,035 - 1)}$$

$$p = 3,5 \% \rightarrow r = 1,035 \quad 60.000 = R \times 3,67307919 \quad / : 3,67 \dots$$

$$R = ? \quad R = \mathbf{16.335,09 \text{ kn}}$$

3. Koliko će se godina, potkraj svake godine podizati po 5.000,00 kn, na temelju jednokratne uplate od 40.000,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan uz godišnji kamatnjak od 3 %.

$$R = 5.000 \text{ kn} \quad A_n = R \times \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

$$A_n = 40.000 \text{ kn} \quad 40.000 = 5.000 \times \frac{1,03^n - 1}{1,03^n(1,03 - 1)} \quad / : 5.000$$

$$p = 3 \% \rightarrow r = 1,03 \quad 8 = \frac{1,03^n - 1}{1,03^n \times 0,03} \quad / \times (1,03^n \times 0,03)$$

$$n = ? \quad 0,24 \times 1,03^n = 1,03^n - 1$$

$$0,24 \times 1,03^n - 1,03^n = -1$$

$$1,03^n(0,24 - 1) = -1$$

$$1,03^n \times (-0,76) = -1 \quad / : (-0,76)$$

$$1,03^n = 1,31578947 \quad / \log$$

$$n \log 1,03 = \log 1,31578947 \quad / : \log 1,03$$

$$n = \frac{\log 1,31578947}{\log 1,03} = \frac{0,119186407}{0,0128372247}$$

$$n = \mathbf{9,28 \text{ god}}$$

$$R = 5.000 \text{ kn}$$

$$A_n = 40.000 \text{ kn}$$

$$p = 3 \% \rightarrow r = 1,03$$

$$n = ? = \mathbf{9,28 \text{ god}}$$

9 godina će se moći podizati iznos od 5.000 kn. Krajem 10. godine će ostati određeni iznos (\hat{R}).

$$\hat{R} = ? \quad \hat{R} = 40.000 \times 1,03^{10} - 5.000 \times 1,03 \times \frac{1,03^9 - 1}{1,03 - 1}$$

$$\hat{R} = 53.756,66 - 52.319,40$$

$$\hat{R} = \mathbf{1.437,26 \text{ kn}}$$

4. Koliki iznos valja uložiti danas u banku da se osigura šest godišnjih prenumerando isplata po 10.000,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan uz godišnji kamatnjak od 4,5 %.

$$R = 10.000 \text{ kn} \quad A'_n = R \times \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$$

$$n = 6 \text{ god} \quad A'_n = 10.000 \times \frac{1,045^6 - 1}{1,045^{6-1}(1,045 - 1)}$$

$$p = 4,5 \% \rightarrow r = 1,045 \quad A'_n = 10.000 \times 5,38997666$$

$$A'_n = ? \quad A'_n = \mathbf{53.899,77 \text{ kn}}$$

5. Koliki se jednaki godišnji iznosi mogu podizati početkom svake godine, tijekom idućih 7 godina, na temelju uloženog iznosa od 145.000,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan, uz godišnji kamatnjak od 2,5 %.

$$n = 7 \text{ god} \quad A'_n = R \times \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$$

$$A'_n = 145.000 \text{ kn} \quad 145.000 = R \times \frac{1,025^7 - 1}{1,025^{7-1}(1,025 - 1)}$$

$$p = 2,5 \% \rightarrow r = 1,025 \quad 145.000 = R \times 6,50812524 \quad / : 6,50 \dots$$

$$R = ? \quad R = \mathbf{22.279,84 \text{ kn}}$$

6. Položen je u banku iznos od 500.000,00 kn na razdoblje od 25 godina. Banka na položeni novac obračunava godišnji iznos kamate od 1,25 %. Ukoliko je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan, odredite koliko će iznositi godišnje:

a. prenumerando isplate.

$$A'_n = 500.000 \text{ kn}$$

$$A'_n = R \times \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$$

$$n = 25 \text{ god}$$

$$500.000 = R \times \frac{1,0125^{25} - 1}{1,0125^{25-1}(1,0125 - 1)}$$

$$p = 1,25 \% \rightarrow r = 1,0125$$

$$500.000 = R \times 21.6242346 \quad / : 21.62 \dots$$

$$R = ?$$

$$R = \mathbf{23.122,21 \text{ kn}}$$

b. postnumerando isplate.

$$A_n = 500.000 \text{ kn}$$

$$A_n = R \times \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

$$n = 25 \text{ god}$$

$$500.000 = R \times \frac{1,0125^{25} - 1}{1,0125^{25}(1,0125 - 1)}$$

$$p = 1,25 \% \rightarrow r = 1,0125$$

$$500.000 = R \times 21.3572687 \quad / : 21.35 \dots$$

$$R = ?$$

$$R = \mathbf{23.411,23 \text{ kn}}$$

Vježbe: Ponavljanje – priprema za test 1

1. Koliko iznose jednostavne kamate na glavnicu od 125.000,00 kn za razdoblje od 4 godine i uz godišnji kamatnjak 6? Obračun kamata je dekurzivan.
2. Obračunajte prodaju mjenice na iznos od 47.250,00 kn plativu 30. travnja koju je poduzeće prodalo banci 10. ožujka uz 2,25 % diskonta, 1 % provizije i 75,00 kn troškova.
3. Ulagач je danas oročio u banci 250.000,00 kn. banka u tom slučaju odobrava 5,25 % godišnjih kamata. Kolikim će iznosom raspolagati na kraju 7. godine ako je obračun kamata dekurzivan, godišnji i složen?
4. Osoba ulaže u banku početkom svake godine po 25.000,00 kn kroz 7 godina. Ako je godišnji kamatnjak 5 %, kolika je konačna vrijednost svih uplata na kraju 6. godine? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.
5. Koliki iznos valja uložiti danas da se osigura 8 godišnjih postnumerando isplate po 5.250,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan, uz godišnji kamatnjak od 3,5 %.
6. Koliki će iznos kamata neka osoba dobiti za 2019. godinu ako su na štednoj knjižici, uz kamatu od 5 %, ispisani slijedeći podaci:

DATUM	ISPLATA	UPLATA	STANJE
25.01.		6.000,00	6.000,00
15.02.	1.500,00		4.500,00
30.03.		3.500,00	8.000,00
25.04.	2.500,00		5.500,00
20.05.		8.000,00	13.500,00
15.06.		5.000,00	18.500,00
30.07.	4.250,00		14.250,00
10.08.		1.350,00	15.600,00
20.09.	2.225,00		13.375,00
20.10.		6.000,00	19.375,00

7. Pet mjenica glasi na: 6.250,00 kn s dospijećem 05.01.; 7.500,00 kn s dospijećem 05.02.; 8.750,00 kn s dospijećem 05.03.; 10.000,00 kn s dospijećem 05.04. i 11.250,00 kn s dospijećem 05.05., koje je potrebno zamijeniti s novom mjenicom s dospijećem 15.04. iste godine. Koji će nominalni iznos biti na novoj mjenici, ako je godišnji diskont 5? Koristite njemačku metoda obračuna broja dana.
8. Koliko je kn uloženo prije 10 godina, ako je danas ostalo na štednoj knjižici 60.000,00 kn, a prije 4 godine podignuto je 15.000,00 kn? Banka je, uz složeni, godišnji i dekurzivni obračun, obračunavala prvih 5 godina 3,5 %, a posljednjih 5 godina 4 % polugodišnjih kamata. Koristite konformni kamatnjak.

9. Neka je osoba uplaćivala u banku početkom svake godine po 2.500,00 \$ kroz 7 godina. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju 15. godine ako je banka prve tri godine primjenjivala kamatnu stopu 5,5 %, u preostalom razdoblju 6 % i ako je osoba u 10. godini podigla iznos od 5.250,00 \$? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

10. Koliki iznos valja uložiti danas u banku da se osigura osam godišnjih prenumerando isplata po 12.000,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan uz polugodišnji kamatnjak od 2,5 %. Koristite relativni kamatnjak.

Vježbe: Vječna renta; Neprekidno ukamaćivanje

1. Izračunajte koliku svotu moramo uložiti početkom sljedeće godine ako želimo primati vječnu prenumerando rentu početkom svake godine u iznosu od 20.000 kn. Godišnja dekurzivna kamatna stopa je 10 %.

$$R = 20.000 \text{ kn} \quad A_{\infty} = \frac{R}{r-1}$$

$$p = 10 \% \rightarrow r = 1,1 \quad A_{\infty} = \frac{20.000}{1,1-1} = \frac{20.000}{0,1} = \mathbf{200.000 \text{ kn}}$$

$$A_{\infty} = ?$$

2. Glavnica od 100.000,00 kn osigurava postnumerando vječnu godišnju rentu u iznosu od 12.000,00 kn. Kapitalizacija je godišnja, složena i dekurzivna. Uz koju je godišnju kamatnu stopu odobrena štednja?

$$A'_{\infty} = 100.000 \text{ kn} \quad A'_{\infty} = \frac{R \times r}{r-1}$$

$$R = 12.000 \text{ kn} \quad 100.000 = \frac{12.000 \times r}{r-1} \quad / \times (r-1)$$

$$p = ? \quad 100.000 r - 100.000 = 12.000 r$$

$$88.000 r = 100.000 \quad / : 88.000$$

$$r = 1,1364 \quad \rightarrow \quad p = 13,64 \%$$

3. Je li povoljnije prodati trosoban stan u Zagrebu kojemu je tržišna vrijednost 1.200.000,00 kn i dobiveni novac oročiti u poslovnoj banci koja na oročena sredstva plaća godišnje kamate 6 % (postnumerando) ili stan dati u najam za godišnju neto najamninu 80.000,00 kn?

$$N = 80.000 \text{ kn} \quad A'_{\infty} = \frac{R \times r}{r-1}$$

$$p = 6 \% \rightarrow r = 1,06 \quad 1.200.000 = \frac{R \times 1,06}{1,06-1} \quad / \times 0,06$$

$$A'_{\infty} = 1.200.000 \quad 72.000 = 1,06R \quad / : 1,06$$

$$R = ? \quad R = \mathbf{67.924,53 \text{ kn}}$$

4. Je li povoljnije prodati trosoban stan u Zagrebu kojemu je tržišna vrijednost 1.200.000,00 kn i dobiveni novac oročiti u poslovnoj banci koja na oročena sredstva plaća godišnje kamate 6 % (prenumerando) ili stan dati u najam za godišnju neto najamninu 80.000,00 kn?

$$N = 80.000 \text{ kn} \quad A_{\infty} = \frac{R}{r-1}$$

$$p = 6 \% \rightarrow r = 1,06 \quad 1.200.000 = \frac{R}{1,06-1} \quad / \times 0,06$$

$$A_{\infty} = 1.200.000 \quad 72.000 = R$$

$$R = ? \quad R = \mathbf{72.000,00 \text{ kn}}$$

5. Pri kojoj će razini prenumerando kamatne stope na oročena sredstva osobi biti isplativije prodati stan iz prethodnog zadatka po tržišnoj vrijednosti od 1.200.000,00 kn u odnosu na 80.000,00 kn godišnje neto najamnine?

$$A_{\infty} = 1.200.000 \text{ kn} \quad A_{\infty} = \frac{R}{r-1}$$

$$R = 80.000 \text{ kn} \quad 1.200.000 = \frac{80.000}{r-1} \quad / \times (r-1)$$

$$p = ? \quad 1.200.000 r - 1.200.000 = 80.000$$

$$1.200.000 r = 1.200.000 + 80.000 \quad / : 1.200.000$$

$$r = 1,0667 \quad \rightarrow \quad \mathbf{p = 6,67\%}$$

6. Određeni se tov peradi u dvije godine udvostruči. Koliki je godišnji prirast?

$$n = 2 \text{ god} \quad C_n = 2 \times C_0$$

$$p = ? \quad C_n = C_0 \times e^{\frac{n \times p}{100}}$$

$$C_0 = ? \quad 2C_0 = C_0 \times e^{\frac{n \times p}{100}} \quad / : C_0$$

$$C_n = ? \quad 2 = e^{\frac{2 \times p}{100}} \quad / \ln$$

$$\ln 2 = 0,02 p \ln e$$

$$0,02 p = \ln 2 \quad / : 0,02$$

$$p = \frac{\ln 2}{0,02} = \mathbf{34,66 \%}$$

7. Za koje će se vrijeme količina drvene mase u nekom šumskom kompleksu utrostručiti ako je prosječna stopa godišnjeg prirasta drvene mase 10,98 %?

$$p = 10,98 \% \quad C_n = 3 \times C_0$$

$$n = ? \quad 3 \times C_0 = C_0 \times e^{\frac{n \times 10,98}{100}} \quad / : C_0$$

$$C_0 = ? \quad 3 = e^{0,1098n} \quad / \ln$$

$$C_n = ? \quad \ln 3 = 0,1098 n \quad / : 0,1098$$

$$n = \frac{\ln 3}{0,1098} = \mathbf{10 \text{ godina}}$$

8. Za koji se postotak poveća stanovništvo jednog grada nakon 10 godina ako je godišnji prirast 1 %?

$$n = 10 \text{ god} \quad C_n = C_0 \times e^{\frac{n \times p}{100}}$$

$$p = 1 \% \rightarrow r = 1,01 \quad C_n = C_0 \times e^{\frac{10 \times 1}{100}}$$

$$X = ? \% \quad C_n = 1,10517092 C_0$$

$$X = (1,10517092 - 1) \times 100 = \mathbf{10,52 \%}$$

9. Godine 1991. prema službenom popisu stanovništva RH je imala 4.784.265 stanovnika, a 2001. 4.437.460. Ako stopa godišnjeg prirasta (pada) ostaje nepromijenjena, koliki je očekivani broj stanovnika 2011. godine?

$$C_0 = 4.784.265 \quad C_n = C_0 \times e^{\frac{n \times p}{100}}$$

$$C_n = 4.437.460 \quad 4.437.460 = 4.784.265 \times e^{10p/100} \quad / : 4.784.265$$

$$n = 10 \text{ god} \quad 0,927511331 = e^{p/10} \quad / \ln$$

$$p = ? \quad \ln 0,927511331 = \frac{p}{10} \ln e \quad / \times 10$$

$$p = 10 \times \ln 0,927511331 = \mathbf{-0,7525 \%}$$

$$C_{2011} = 4.284.889 \quad C_{2011} = C_{2001} \times e^{\frac{n \times p}{100}} = 4.437.460 \times e^{\frac{10 \times (-0,7525)}{100}} = \mathbf{4.115.795,53}$$

10. Godine 1991. prema službenom popisu stanovništva RH je imala 4.784.265 stanovnika, a 2011. 4.284.889. Ako stopa godišnjeg prirasta (pada) ostaje nepromijenjena, koliki je očekivani broj stanovnika 2021. godine?

$$C_0 = 4.784.265 \quad C_n = C_0 \times e^{\frac{n \times p}{100}}$$

$$C_n = 4.284.889 \quad 4.284.889 = 4.784.265 \times e^{20p/100} \quad / : 4.784.265$$

$$n = 10 \text{ god} \quad 0,895621166 = e^{p/5} \quad / \ln$$

$$p = ? \quad \ln 0,895621166 = \frac{p}{5} \ln e \quad / \times 5$$

$$p = 5 \times \ln 0,895621166 = \mathbf{-0,5512 \%}$$

$$C_{2021} = C_{2011} \times e^{\frac{n \times p}{100}} = 4.284.889 \times e^{\frac{10 \times (-0,5512)}{100}} = \mathbf{4.055.097,16}$$

11. Koliko će kg imati dijete na svoj 6. rođendan ako je rođeno sa 3,5 kg i ako se pretpostavlja da prve dvije godine kontinuirano dobiva 5 % mjesečno, a posljednje 4 godine prosječno 2 % mjesečno?

$$C_0 = 3,5 \text{ kg} \quad C_n = C_0 \times e^{\frac{n \times p}{100}}$$

$C_6 = ?$

$$C_6 = C_0 \times e^{\frac{n \times p}{100}} \times e^{\frac{n \times p}{100}}$$

$p_1 = 5 \% \rightarrow n_1 = 2 \text{ god}$

$$C_6 = 3,5 \times e^{\frac{24 \times 5}{100}} \times e^{\frac{48 \times 2}{100}}$$

$p_2 = 2 \% \rightarrow n_2 = 4 \text{ god}$

$$C_6 = \mathbf{30,35 \text{ kg}}$$

Vježbe: Zajam – model otplate jednakim anuitetima

1. Zajam od 50.000,00 kn dobiven je na 4 godine otplate uz 8 % godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta krajem svake godine. Napišite otplatnu tablicu.

$$C = 50.000 \text{ kn} \quad a = C \times \frac{r^n(r-1)}{r^n-1}$$

$$n = 4 \text{ god} \quad a = 50.000 \times \frac{1,08^4(1,08-1)}{1,08^4-1}$$

$$p = 8 \% \rightarrow r = 1,08 \quad a = \mathbf{15.096,04 \text{ kn}}$$

$$I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 50.000 \times 0,08 = \mathbf{4.000 \text{ kn}}$$

$$R_1 = a - I_1 = 15.096,04 - 4.000 = \mathbf{11.096,04 \text{ kn}}$$

$$C_1 = C_{k-1} - R_1 = 50.000 - 11.096,04 = \mathbf{38.903,96 \text{ kn}}$$

razdoblje	anuitet	kamate	otplatna kvota	ostatak dugovanja
K	ak	Ik	Rk	Ck
0	-	-	-	50.000,00
1	15.096,04	4.000,00	11.096,04	38.903,96
2	15.096,04	3.112,32	11.983,72	26.920,24
3	15.096,04	2.153,62	12.942,42	13.977,82
4	15.096,04	1.118,23	13.977,82	0,00
Σ	60.384,16	10.384,16	50.000,00	

2. U otplatnoj tablici zajma odobrenog na 5 godina, nalazimo da je treća otplatna kvota 12.650,00 kn. Koliki je iznos odobrenog zajma i anuiteta ako su anuiteti jednaki i dospijevaju krajem godine? Godišnji kamatnjak je 8 %, a obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan.

$$n = 5 \text{ god} \quad R_k = R_1 \times r^{k-1}$$

$$R_3 = 12.650 \text{ kn} \quad 12.650 = R_1 \times 1,08^2$$

$$p = 8 \% \rightarrow r = 1,08 \quad 12.650 = 1,1664 R_1 \quad / : 1,1664$$

$$C = ? \quad R_1 = 10.845,34 \text{ kn}$$

$$a = ? \quad C = R_1 \times \frac{r^n-1}{r-1} = 10.845,34 \times \frac{1,08^5-1}{1,08-1} = \mathbf{63.625,28 \text{ kn}}$$

$$a = C \times \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 63.625,28 \times \frac{1,08^5(1,08-1)}{1,08^5-1} = \mathbf{15.935,36 \text{ kn}}$$

3. Zajam je odobren poduzeću na 5 godina uz 6 % godišnjih kamata i otplaćuje se nominalno jednakim anuitetima krajem godine u iznosu 50.000,00 kn. Odredite iznos zajma. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Napravite plan otplate.

$$n = 5 \text{ god} \quad C = a \times \frac{r^n-1}{r^n(r-1)}$$

$$p = 6\% \rightarrow r = 1,06 \quad C = 50.000 \times \frac{1,06^5 - 1}{1,06^5(1,06 - 1)}$$

$$a = 50.000 \text{ kn} \quad C = 210.618,19 \text{ kn}$$

$$C = ? \quad I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 210.618,19 \times 0,06 = 12.637,09 \text{ kn}$$

$$R_1 = a - I_1 = 50.000 - 12.637,09 = 37.362,91 \text{ kn}$$

$$C_1 = C_{k-1} - R_1 = 210.618,19 - 37.362,91 = 173.255,28 \text{ kn}$$

razdoblje	anuitet	kamate	otplatna kvota	ostatak dugovanja
K	ak	Ik	Rk	Ck
0	-	-	-	210.618,19
1	50.000,00	12.637,09	37.362,91	173.255,28
2	50.000,00	10.395,32	39.604,68	133.650,60
3	50.000,00	8.019,04	41.980,96	91.669,63
4	50.000,00	5.500,18	44.499,82	47.169,81
5	50.000,00	2.830,19	47.169,81	0,00
Σ	250.000,00	39.381,81	210.618,19	

4. Zajam od 600.000,00 kn odobren je na 3 godine uz 10 % godišnjih kamata i iste (konstantne) otplatne kvote. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

$$C = 600.000 \text{ kn} \quad a = C \times \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 600.000 \times \frac{1,1^3(1,1-1)}{1,1^3-1} = 241.268,88 \text{ kn}$$

$$n = 3 \text{ god} \quad I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 600.000 \times \frac{10}{100} = 60.000 \text{ kn}$$

$$p = 10\% \rightarrow r = 1,1 \quad R_1 = a - I_1 = 241.268,88 - 60.000 = 181.268,88 \text{ kn}$$

$$C_1 = C_{k-1} - R_1 = 600.000 - 181.268,88 = 418.731,12 \text{ kn}$$

razdoblje	anuitet	kamate	otplatna kvota	ostatak dugovanja
K	ak	Ik	Rk	Ck
0	-	-	-	600.000,00
1	241.268,88	60.000,00	181.268,88	418.731,12
2	241.268,88	41.873,11	199.395,77	219.335,35
3	241.268,88	21.933,53	219.335,35	0,00
Σ	723.806,65	123.806,65	600.000,00	

5. Zajam u iznosu od 50.000,00 kn odobren je na 2 godine uz 10 % dekurzivnih godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta krajem polugodišta. Izradite otplatnu tablicu ako je obračun kamata složen i polugodišnji. Koristite konformni kamatnjak.

$$C = 50.000 \text{ kn} \quad m = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$n = 2 \text{ god} \quad p' = 100 \times \left[\left(1 + \frac{p}{100} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \times \left[\left(1 + \frac{10}{100} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] =$$

$$4,88\%$$

$$p = 10 \% \rightarrow r = 1,1 \quad r' = 1,0488$$

$$n_1 = 1 \text{ god} \quad a = C \times \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 50.000 \times \frac{1,0488^4(1,0488-1)}{1,0488^4-1} = 14.061,31 \text{ kn}$$

$$n_2 = 1 \text{ polugod} \quad I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 50.000 \times \frac{4,88}{100} = 2.440 \text{ kn}$$

$$R_1 = a - I_1 = 14.061,31 - 2.440 = 11.621,31 \text{ kn}$$

$$C_1 = C_{k-1} - R_1 = 50.000 - 11.621,31 = 38.378,69 \text{ kn}$$

<i>razdoblje</i>	<i>anuitet</i>	<i>kamate</i>	<i>otplatna kvota</i>	<i>ostatak dugovanja</i>
K	ak	Ik	Rk	Ck
0	-	-	-	50.000,00
1	14.061,31	2.440,00	11.621,31	38.378,69
2	14.061,31	1.872,88	12.188,43	26.190,27
3	14.061,31	1.278,08	12.783,22	13.407,04
4	14.061,31	654,26	13.407,04	0,00
Σ	56.245,23	6.245,23	50.000,00	

Vježbe: Zajam – model otplate različitim anuitetima

1. Poduzeću je odobren kredit u iznosu od 150.000,00 kn na razdoblje od 5 godina uz složen, godišnji i dekurzivan obračun kamata uz kamatnjak 6. Zajam će se otplaćivati jednakim otplatnim kvotama krajem godine. Izradite otplatnu tablicu.

$$C = 150.000 \text{ kn} \quad R = \frac{C_0}{n} = \frac{150.000}{5} = 30.000 \text{ kn}$$

$$n = 5 \text{ god} \quad I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 150.000 \times \frac{6}{100} = 9.000 \text{ kn}$$

$$p = 6 \% \rightarrow r = 1,06 \quad a_1 = I_1 + R = 9.000 + 30.000 = 39.000 \text{ kn}$$

R = ?

<i>razdoblje</i>	<i>anuitet</i>	<i>kamate</i>	<i>otplatna kvota</i>	<i>ostatak dugovanja</i>
K	ak	lk	Rk	Ck
0	-	-	-	150.000,00
1	39.000,00	9.000,00	30.000,00	120.000,00
2	37.200,00	7.200,00	30.000,00	90.000,00
3	35.400,00	5.400,00	30.000,00	60.000,00
4	33.600,00	3.600,00	30.000,00	30.000,00
5	31.800,00	1.800,00	30.000,00	0,00
Σ	177.000,00	27.000,00	150.000,00	

2. Banka je poduzeću odobrila zajam u iznosu od 300.000,00 kn na razdoblje od 3 godine uz 5 % godišnjih dekurzivnih kamata i plaćanje jednakim otplatnim kvotama krajem polugodišta. Obračun kamata je složen i polugodišnji. Izračunajte relativni kamatnjak. Izradite otplatnu tablicu.

$$C = 300.000 \text{ kn} \quad m = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1/2} = 2 \quad p_r = \frac{p}{m} = \frac{5}{2} = 2,5 \% \quad r = 1,025$$

$$n = 3 \text{ god} \quad R = \frac{C_0}{n} = \frac{300.000}{6} = 50.000 \text{ kn}$$

$$p = 5 \% \rightarrow r = 1,05 \quad I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 300.000 \times \frac{2,5}{100} = 7.500 \text{ kn}$$

$$n_1 = 1 \text{ god} \quad a_1 = I_1 + R = 7.500 + 50.000 = 57.500 \text{ kn}$$

n2 = 1 polugod

<i>razdoblje</i>	<i>anuitet</i>	<i>kamate</i>	<i>otplatna kvota</i>	<i>ostatak dugovanja</i>
K	ak	lk	Rk	Ck
0	-	-	-	300.000,00
1	57.500,00	7.500,00	50.000,00	250.000,00
2	56.250,00	6.250,00	50.000,00	200.000,00
3	55.000,00	5.000,00	50.000,00	150.000,00
4	53.750,00	3.750,00	50.000,00	100.000,00
5	52.500,00	2.500,00	50.000,00	50.000,00
6	51.250,00	1.250,00	50.000,00	0,00
Σ	326.250,00	26.250,00	300.000,00	

3. Banka je poduzeću odobrila zajam u iznosu od 175.000,00 kn na razdoblje od 5 godina uz 3 % polugodišnjih dekurzivnih kamata i plaćanje jednakim otplatnim kvotama krajem svake godine. Obračun kamata je složen i godišnji. Izračunajte konformni kamatnjak. Izradite otplatnu tablicu.

$$C = 175.000 \text{ kn} \quad m = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1/2}{1} = 1/2$$

$$n = 5 \text{ god} \quad p' = 100 \times \left[\left(1 + \frac{p}{100} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \times \left[\left(1 + \frac{3}{100} \right)^{\frac{1}{1/2}} - 1 \right]$$

$$p = 3 \% \quad p' = 6,09 \% \quad r' = 1,0609$$

$$n_1 = 1 \text{ polugod} \quad R = \frac{C_0}{n} = \frac{175.000}{5} = 35.000 \text{ kn}$$

$$n_2 = 1 \text{ god} \quad I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 175.000 \times \frac{6,09}{100} = 10.657,50 \text{ kn}$$

$$a_1 = I_1 + R = 10.657,50 + 35.000 = 45.657,50 \text{ kn}$$

razdoblje	anuitet	kamate	otplatna kvota	ostatak dugovanja
K	ak	Ik	Rk	Ck
0	-	-	-	175.000,00
1	45.657,50	10.657,50	35.000,00	140.000,00
2	43.526,00	8.526,00	35.000,00	105.000,00
3	41.394,50	6.394,50	35.000,00	70.000,00
4	39.263,00	4.263,00	35.000,00	35.000,00
5	37.131,50	2.131,50	35.000,00	0,00
Σ	206.972,50	31.972,50	175.000,00	

4. Odredite otplatne kvote za zajam u visini od 350.000,00 kn koji će se vraćati 5 godina uz 10 % dekurzivnih godišnjih kamata i plaćanje promjenjivih anuiteta krajem godine. Otplatne kvote čine aritmetički niz, a iznos prvog godišnjeg anuiteta procijenjen je na 70.000,00 kn. Izradite otplatnu tablicu.

$$C = 350.000 \text{ kn} \quad R_1 = a_1 - \frac{C_0 \times p}{100} = 70.000 - \frac{350.000 \times 10}{100} = 35.000 \text{ kn}$$

$$n = 5 \text{ god} \quad R_1 \in \left(0, \frac{2 \times C_0}{n} \right) \quad R_1 = 35.000 \in \left(0, \frac{2 \times 350.000}{5} \right) = (0, 140.000)$$

$$p = 10 \% \quad d = 2 \times \frac{C_0 - n \times R_1}{n \times (n-1)} = 2 \times \frac{350.000 - 5 \times 35.000}{5 \times (5-1)} = 17.500 \text{ kn}$$

$$a_1 = 70.000 \text{ kn}$$

razdoblje	anuitet	kamate	otplatna kvota	ostatak dugovanja
K	ak	Ik	Rk	Ck
0	-	-	-	350.000,00
1	70.000,00	35.000,00	35.000,00	315.000,00
2	84.000,00	31.500,00	52.500,00	262.500,00
3	96.250,00	26.250,00	70.000,00	192.500,00
4	106.750,00	19.250,00	87.500,00	105.000,00
5	115.500,00	10.500,00	105.000,00	0,00
Σ	472.500,00	122.500,00	350.000,00	

5. Odredite otplatne kvote za zajam u visini od 50.000,00 kn koji će se vraćati 3 godine uz 10 % dekurzivnih godišnjih kamata i plaćanje promjenjivih anuiteta krajem polugodišta. Otplatne kvote čine aritmetički niz, a iznos prvog polugodišnjeg anuiteta procijenjen je na 7.000,00 kn. Izradite otplatnu tablicu. Koristite relativni kamatnjak.

$$C = 50.000 \text{ kn} \quad m = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1/2} = 2 \quad p_r = p/m = 10/2 = 5 \%$$

$$n = 3 \text{ god} \quad R_1 = a_1 - \frac{C_0 \times p}{100} = 7.500 - \frac{50.000 \times 5}{100} = 5.000 \text{ kn}$$

$$p = 10 \% \quad R_1 \in \left(0, \frac{2 \times C_0}{n}\right) \quad R_1 = 5.000 \in \left(0, \frac{2 \times 50.000}{6}\right) = (0, 16.666,67)$$

$$a_1 = 7.500 \text{ kn} \quad d = 2 \times \frac{C_0 - n \times R_1}{n \times (n-1)} = 2 \times \frac{50.000 - 6 \times 5.000}{6 \times (6-1)} = \mathbf{1.333,33 \text{ kn}}$$

<i>razdoblje</i>	<i>anuitet</i>	<i>kamate</i>	<i>otplatna kvota</i>	<i>ostatak dugovanja</i>
K	ak	Ik	Rk	Ck
0	-	-	-	50.000,00
1	7.500,00	2.500,00	5.000,00	45.000,00
2	8.583,33	2.250,00	6.333,33	38.666,67
3	9.600,00	1.933,33	7.666,67	31.000,00
4	10.550,00	1.550,00	9.000,00	22.000,00
5	11.433,33	1.100,00	10.333,33	11.666,67
6	12.250,00	583,33	11.666,67	0,00
Σ	59.916,67	9.916,67	50.000,00	

Vježbe: Zajam – nepotpuni / krnji anuiteti; Konverzija zajma

1. Odredite koliko će godina trajati otplata zajma od 100.000,00 kn uz dekurzivnu kapitalizaciju, dogovorene anuitete u iznosu od 30.000 kn koji se plaćaju krajem godine i godišnje kamate od 10 %. Napravite plan otplate.

$$C = 100.000 \text{ kn} \quad n = \frac{\log a - \log[a - C_0(r-1)]}{\log r} = \frac{\log 30.000 - \log[30.000 - 100.000(1,1-1)]}{\log 1,1} =$$

4,25 god

$$a = 30.000 \text{ kn}$$

$$p = 10 \%$$

$$\begin{aligned} a'_{n+1} &= C_0 \times r^{n+1} - a \times r \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = 100.000 \times 1,1^{4+1} - 30.000 \times 1,1 \times \frac{1,1^4 - 1}{1,1 - 1} \\ &= 161.051 - 153.153 = \mathbf{7.898,00 \text{ kn}} \end{aligned}$$

$$I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 100.000 \times \frac{10}{100} = 10.000 \text{ kn}$$

razdoblje	anuitet	kamate	otplatna kvota	ostatak dugovanja
K	ak	Ik	Rk	Ck
0	-	-	-	100.000,00
1	30.000,00	10.000,00	20.000,00	80.000,00
2	30.000,00	8.000,00	22.000,00	58.000,00
3	30.000,00	5.800,00	24.200,00	33.800,00
4	30.000,00	3.380,00	26.620,00	7.180,00
5	7.898,00	718,00	7.180,00	0,00
Σ	127.898,00	27.898,00	100.000,00	

$$I_5 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 7.180 \times \frac{10}{100} = 718,00 \text{ kn}$$

$$a_5 = I_5 + R_5 = 718 + 7.180 = 7.898,00 \text{ kn}$$

2. Izradite otplatnu tablicu za zajam od 400.000,00 kn odobren radnoj organizaciji uz 10 % dekurzivnih kamata i anuitetom od 125.000,00 kn.

$$C = 400.000 \text{ kn} \quad p = 10 \% \quad a = 125.000 \text{ kn}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log a - \log[a - C_0(r-1)]}{\log r} = \frac{\log 125.000 - \log[125.000 - 400.000(1,1-1)]}{\log 1,1} \\ &= \mathbf{4,05 \text{ god}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{n+1} &= C_0 \times r^{n+1} - a \times r \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = 400.000 \times 1,1^{4+1} - 125.000 \times 1,1 \times \frac{1,1^4 - 1}{1,1 - 1} \\ &= 644.204 - 638.137,50 = \mathbf{6.066,50 \text{ kn}} \end{aligned}$$

<i>razdoblje</i>	<i>anuitet</i>	<i>kamate</i>	<i>otplatna kvota</i>	<i>ostatak dugovanja</i>
K	ak	lk	Rk	Ck
0	-	-	-	400.000,00
1	125.000,00	40.000,00	85.000,00	315.000,00
2	125.000,00	31.500,00	93.500,00	221.500,00
3	125.000,00	22.150,00	102.850,00	118.650,00
4	125.000,00	11.865,00	113.135,00	5.515,00
5	6.066,50	551,50	5.515,00	0,00
Σ	506.066,50	106.066,50	400.000,00	

$$I_5 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 5.515 \times \frac{10}{100} = 551,50 \text{ kn}$$

$$a_5 = I_5 + R_5 = 551,50 + 5.515 = 6.066,50 \text{ kn}$$

3. Izradite otplatnu tablicu za zajam od 175.000,00 kn odobren radnoj organizaciji uz 5 % godišnjih, dekurzivnih kamata i polugodišnjim anuitetom od 30.000,00 kn. Koristite relativni kamatnjak.

$$C = 175.000 \text{ kn} \quad p = 10 \% \quad a = 30.000 \text{ kn}$$

$$m = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1/2} = 2 \quad p_r = 10/2 = 5 \%$$

$$n = \frac{\log a - \log[a - C_0(r - 1)]}{\log r} = \frac{\log 30.000 - \log[30.000 - 175.000(1,05 - 1)]}{\log 1,05}$$

$$= 7,07 \text{ polugodišta}$$

$$a'_{n+1} = C_0 \times r^{n+1} - a \times r \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = 175.000 \times 1,05^{7+1} - 30.000 \times 1,05 \times \frac{1,05^7 - 1}{1,05 - 1}$$

$$= 258.554,70 - 256.473,27 = 2.081,44 \text{ kn}$$

<i>razdoblje</i>	<i>anuitet</i>	<i>kamate</i>	<i>otplatna kvota</i>	<i>ostatak dugovanja</i>
K	ak	lk	Rk	Ck
0	-	-	-	175.000,00
1	30.000,00	8.750,00	21.250,00	153.750,00
2	30.000,00	7.687,50	22.312,50	131.437,50
3	30.000,00	6.571,88	23.428,13	108.009,38
4	30.000,00	5.400,47	24.599,53	83.409,84
5	30.000,00	4.170,49	25.829,51	57.580,34
6	30.000,00	2.879,02	27.120,98	30.459,35
7	30.000,00	1.522,97	28.477,03	1.982,32
8	2.081,44	99,12	1.982,32	0,00
Σ	212.081,44	37.081,44	175.000,00	

4. Zajam od 400.000,00 kn odobren je poduzeću na 3 godine uz 12 % godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta potkraj godine. Nakon uplate drugog anuiteta, vrijeme otplate produžava se za godinu dana. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

$$C = 400.000 \text{ kn} \quad a_1 = C \times \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 400.000 \times \frac{1,12^3(1,12-1)}{1,12^3-1} = \mathbf{166.539,59 \text{ kn}}$$

$$n = 3 \text{ god} \quad I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 400.000 \times \frac{12}{100} = 40.000 \text{ kn}$$

$$p = 12 \% \rightarrow r = 1,12 \quad R_1 = a - I_1 = 166.539,59 - 40.000 = 118.539,59 \text{ kn}$$

$$C_1 = C_{k-1} - R_1 = 400.000 - 118.539,59 = 281.460,41 \text{ kn}$$

$$a_2 = C \times \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 148.696,06 \times \frac{1,12^2(1,12-1)}{1,12^2-1} = \mathbf{87.983,18 \text{ kn}}$$

razdoblje	anuitet	kamate	otplatna kvota	ostatak dugovanja
K	ak	lk	Rk	Ck
0	-	-	-	400.000,00
1	166.539,59	48.000,00	118.539,59	281.460,41
2	166.539,59	33.775,25	132.764,34	148.696,06
3	87.983,18	17.843,53	70.139,65	78.556,41
4	87.983,18	9.426,77	78.556,41	0,00
Σ	509.045,55	109.045,55	400.000,00	

5. Zajam od 150.000,00 kn odobren je poduzeću na 2 godine uz 7 % godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta potkraj svakog polugodišta. Nakon uplate drugog anuiteta, vrijeme otplate produžava se za godinu dana. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun kamata je polugodišnji, složen i dekurzivan. Koristite relativni kamatnjak.

$$C = 150.000 \text{ kn} \quad a_1 = C \times \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 150.000 \times \frac{1,035^4(1,035-1)}{1,035^4-1} = \mathbf{40.837,67 \text{ kn}}$$

$$n = 2 \text{ god} \quad I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 150.000 \times \frac{3,5}{100} = 5.250,00 \text{ kn}$$

$$p = 7 \% \quad R_1 = a - I_1 = 40.837,67 - 5.250,00 = 35.587,67 \text{ kn}$$

$$m = 1/(1/2) \quad C_1 = C_{k-1} - R_1 = 150.000 - 35.587,67 = 114.412,33 \text{ kn}$$

$$pr = 3,5 \% \quad a_2 = C \times \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 77.579,09 \times \frac{1,035^4(1,035-1)}{1,035^4-1} = \mathbf{21.121,00 \text{ kn}}$$

razdoblje	anuitet	kamate	otplatna kvota	ostatak dugovanja
K	ak	lk	Rk	Ck
0	-	-	-	150.000,00
1	40.837,67	5.250,00	35.587,67	114.412,33
2	40.837,67	4.004,43	36.833,24	77.579,09
3	21.121,00	2.715,27	18.405,73	59.173,36
4	21.121,00	2.071,07	19.049,93	40.123,43
5	21.121,00	1.404,32	19.716,68	20.406,76
6	21.121,00	714,24	20.406,76	0,00
Σ	166.159,32	16.159,32	150.000,00	

6. Zajam od 62.700,00 kn odobren je poduzeću na 4 godine uz 3 % polugodišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta potkraj svake godine. Nakon uplate drugog anuiteta, vrijeme otplate produžava se za godinu dana. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan. Koristite konformni kamatnjak.

$$C = 62.700 \text{ kn} \quad p' = 100 \times \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \times \left[\left(1 + \frac{3}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = 6,09 \%$$

$$n = 5 \text{ god} \quad a_1 = C \times \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 62.700 \times \frac{1,0609^4(1,0609-1)}{1,0609^4-1} = \mathbf{18.131,99 \text{ kn}}$$

$$p = 3 \% \quad I_1 = C_{k-1} \times \frac{p}{100} = 62.700 \times \frac{6,09}{100} = 3.818,43 \text{ kn}$$

$$m = (1/2)/1 = 1/2 \quad R_1 = a - I_1 = 18.131,99 - 3.818,43 = 14.313,56 \text{ kn}$$

$$C_1 = C_{k-1} - R_1 = 62.700 - 14.313,56 = 48.386,44 \text{ kn}$$

$$a_2 = C \times \frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 33.201,18 \times \frac{1,0609^3(1,0609-1)}{1,0609^3-1} = \mathbf{12.441,58 \text{ kn}}$$

<i>razdoblje</i>	<i>anuitet</i>	<i>kamate</i>	<i>otplatna kvota</i>	<i>ostatak dugovanja</i>
K	ak	lk	Rk	Ck
0	-	-	-	62.700,00
1	18.131,99	3.818,43	14.313,56	48.386,44
2	18.131,99	2.946,73	15.185,26	33.201,18
3	12.441,58	2.021,95	10.419,62	22.781,56
4	12.441,58	1.387,40	11.054,18	11.727,38
5	12.441,58	714,20	11.727,38	0,00
Σ	73.588,71	10.888,71	62.700,00	

Vježbe: Ponavljanje – priprema za test 2

1. U otplatnoj tablici zajma odobrenog na 4 godine, nalazimo da je druga otplatna kvota 7.650,00 kn. Koliki je iznos odobrenog zajma i anuiteta ako su anuiteti jednaki i dospijevaju krajem godine? Godišnji kamatnjak je 7,5 %, a obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan.
2. Poduzeću je odobren kredit u iznosu od 50.000,00 kn na razdoblje od 2 godine uz složen, godišnji i dekurzivan obračun kamata uz kamatnjak 5. Zajam će se otplaćivati jednakim otplatnim kvotama krajem godine. Izradite otplatnu tablicu.
3. Odredite otplatne kvote za zajam u visini od 75.000,00 kn koji će se vraćati 3 godine uz 4 % dekurzivnih godišnjih kamata i plaćanje promjenjivih anuiteta krajem godine. Otplatne kvote čine aritmetički niz, a iznos prvog godišnjeg anuiteta procijenjen je na 20.000,00 kn. Izradite otplatnu tablicu.
4. Odredite koliko će godina trajati otplata zajma od 68.000,00 kn uz dekurzivnu kapitalizaciju, dogovorene anuitete u iznosu od 15.000,00 kn koji se plaćaju krajem godine i godišnje kamate od 8 %. Izračunajte vrijednost krnjeg anuiteta.
5. Zajam od 80.000,00 kn odobren je poduzeću na 2 godine uz 5 % godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta potkraj godine. Nakon uplate prvog anuiteta, vrijeme otplate produžava se za godinu dana. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.
6. Zajam je odobren poduzeću na 7 godina uz 4 % godišnjih kamata i otplaćuje se nominalno jednakim anuitetima krajem godine u iznosu 37.000,00 kn. Odredite iznos zajma. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Napravite plan otplate.
7. Banka je poduzeću odobrila zajam u iznosu od 170.000,00 kn na razdoblje od 3 godine uz 6 % godišnjih dekurzivnih kamata i plaćanje jednakim otplatnim kvotama krajem polugodišta. Obračun kamata je složen i polugodišnji. Izračunajte relativni kamatnjak. Izradite otplatnu tablicu.
8. Odredite otplatne kvote za zajam u visini od 700.000,00 kn koji će se vraćati 7 godina uz 6 % dekurzivnih godišnjih kamata i plaćanje promjenjivih anuiteta krajem godine. Otplatne kvote čine aritmetički niz, a iznos prvog godišnjeg anuiteta procijenjen je na 55.000,00 kn. Izradite otplatnu tablicu.
9. Koliko će godina trajati otplata zajma od 500.000,00 kn uz dogovorene anuitete od 85.000 kn krajem svake godine uz složeni, dekurzivni godišnji kamatnjak od 4,5 %? Koliko iznosi krnji anuitet? Sastavite otplatnu tablicu.

10. Banka OPG-u odobrava zajam od 300.000,00 na 4 godine uz 5% godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta potkraj godine. Nakon uplate drugog anuiteta, vrijeme otplate produžava se za tri godine. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

Vježbe: Priprema za kolokvij

1. Koliki će iznos kamata neka osoba dobiti za tekuću godinu ako su na štednoj knjižici, uz kamatu od 6 %, ispisani slijedeći podaci:

DATUM	ISPLATA	UPLATA	STANJE
05.02.		3.750,00	3.750,00
05.04.	250,00		3.500,00
05.05.		2.000,00	5.500,00
05.07.	2.000,00		3.500,00
05.08.	1.250,00		2.250,00
05.09.		1.250,00	3.500,00
05.11.	1.000,00		2.500,00
05.12.		1.000,00	3.500,00

2. Pet mjenica glasi na: 1.000,00 kn s dospeljećem 20.02.; 1.500,00 kn s dospeljećem 20.04.; 2.000,00 kn s dospeljećem 20.06.; 2.500,00 kn s dospeljećem 20.07. i 3.000,00 kn s dospeljećem 20.08., koje je potrebno zamijeniti s novom mjenicom s dospeljećem 20.06. iste godine. Koji će nominalni iznos biti na novoj mjenici, ako je godišnji diskont 10? Koristite englesku metoda obračuna broja dana.
3. Koliko je kn uloženo prije 15 godina, ako je danas ostalo na štednoj knjižici 57.000 kn, a prije 5 godina podignuto je 12.000,00 kn? Banka je, uz složeni, godišnji i dekurzivni obračun, obračunavala prvih 5 godina 3 %, a u ostatku razdoblja 4 % polugodišnjih kamata. Koristite konformni kamatnjak.
4. Neka je osoba uplaćivala u banku početkom svake godine po 500,00 kn kroz 10 godina. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju 20. godine ako je banka prvih pet godina primjenjivala kamatnu stopu 5 %, a u preostalom razdoblju 4 % i ako je osoba u 15. godini podigla iznos od 6.000,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.
5. Koliki iznos valja uložiti danas u banku da se osigura deset godišnjih prenumerando isplata po 7.500,00 kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan uz polugodišnji kamatnjak od 5 %. Koristite relativni kamatnjak.
6. Je li povoljnije prodati nekretninu tržišne vrijednosti 2.500.000,00 kn i dobiveni novac oročiti u poslovnoj banci koja na oročena sredstva plaća godišnje kamate 4,5 % (prenumerando) ili nekretninu dati u najam za godišnju neto najamninu u visini 175.000,00 kn? Pri kojoj razini kamata bi se odlučili za drugu opciju?
7. Populacija Primorsko-goranske županije prema službenom popisu stanovništva 2001. godine je iznosila 305.505 stanovnika, a 2011. taj broj je bio 296.195 stanovnika. Ako stopa godišnjeg prirasta ostaje nepromijenjena, koliki je očekivani broj stanovnika u županiji 2021. godine?

8. Zajam u iznosu od 89.000,00 kn odobren je na 3 godine uz 6,5 % dekurzivnih godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta krajem polugodišta. Izradite otplatnu tablicu ako je obračun kamata složen i polugodišnji. Koristite relativni kamatnjak.
9. Banka je poduzeću odobrila zajam u iznosu od 47.500,00 kn na razdoblje od 5 godina uz 2 % polugodišnjih dekurzivnih kamata i plaćanje jednakim otplatnim kvotama krajem svake godine. Obračun kamata je složen i godišnji. Izračunajte konformni kamatnjak. Izradite otplatnu tablicu.
10. Odredite otplatne kvote za zajam u visini od 60.000,00 kn koji će se vraćati 3 godine uz 12 % dekurzivnih godišnjih kamata i plaćanje promjenjivih anuiteta krajem polugodišta. Otplatne kvote čine aritmetički niz, a iznos prvog polugodišnjeg anuiteta procijenjen je na 10.000,00 kn. Izradite otplatnu tablicu. Koristite relativni kamatnjak.
11. Izradite otplatnu tablicu za zajam od 100.000,00 kn odobren radnoj organizaciji uz 8 % godišnjih, dekurzivnih kamata i polugodišnjim anuitetom od 25.000,00 kn. Koristite relativni kamatnjak.
12. Zajam od 75.000,00 kn odobren je poduzeću na 4 godine uz 7 % godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta potkraj godine. Nakon uplate trećeg anuiteta, vrijeme otplate produžava se za dvije godine. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.